

Comportement de filaments tubulaires de nature biologique

Dominique Proudhon et Denys Pommeret-IREM d'Aix-Marseille

5 Juillet 2010

[dominique.proudhon@ac-aix-marseille.fr; denys.pommeret@univmed.fr]

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Position du problème	2
1.2	Discrétisation	2
1.3	Les étapes	3
2	Espérance	3
2.1	Calcul de a_n et b_n	3
2.1.1	Utilisation des suites arithmético-géométriques	3
2.1.2	Méthode matricielle	4
2.2	Calcul de l'espérance de l_n	5
3	Variance	6
4	Première approche de la durée de vie	7
5	Approximation normale	8
6	Approximation binomiale	9
7	Comparaison des différentes méthodes d'approximation	9
7.1	Premier essai	9
7.2	Deuxième essai	10
7.3	Troisième essai	10
7.4	Synthèse	11
8	Approximation de la longueur moyenne du filament durant son existence	12
8.1	Les formules	12
8.2	Les résultats	12
9	Conclusion	12

1 Introduction

1.1 Position du problème

On s'intéresse au comportement d'un filament tubulaire de nature biologique soumis aux règles suivantes :

1. Il apparaît à l'instant $t = 0$, de longueur nulle ;
2. Entre l'instant $t = 0$ et $t = 1$, il grandit avec une vitesse constante $v_1 > 0$;
3. Ensuite, à tout instant,
 - Il peut passer de croissance à la décroissance (vitesse constante $v_2 < 0$), avec une probabilité p_1 , ou continuer à croître avec une probabilité $1 - p_1$;
 - Ou bien, il peut passer de la décroissance à la croissance avec une probabilité p_2 , ou continuer à décroître, avec une probabilité $1 - p_2$.
4. Les réels p_1 et p_2 sont supposés strictement entre 0 et 1.
5. Il n'y a pas de limite à la croissance, ni à la décroissance, ce qui peut l'amener virtuellement à une longueur négative.

1.2 Discrétisation

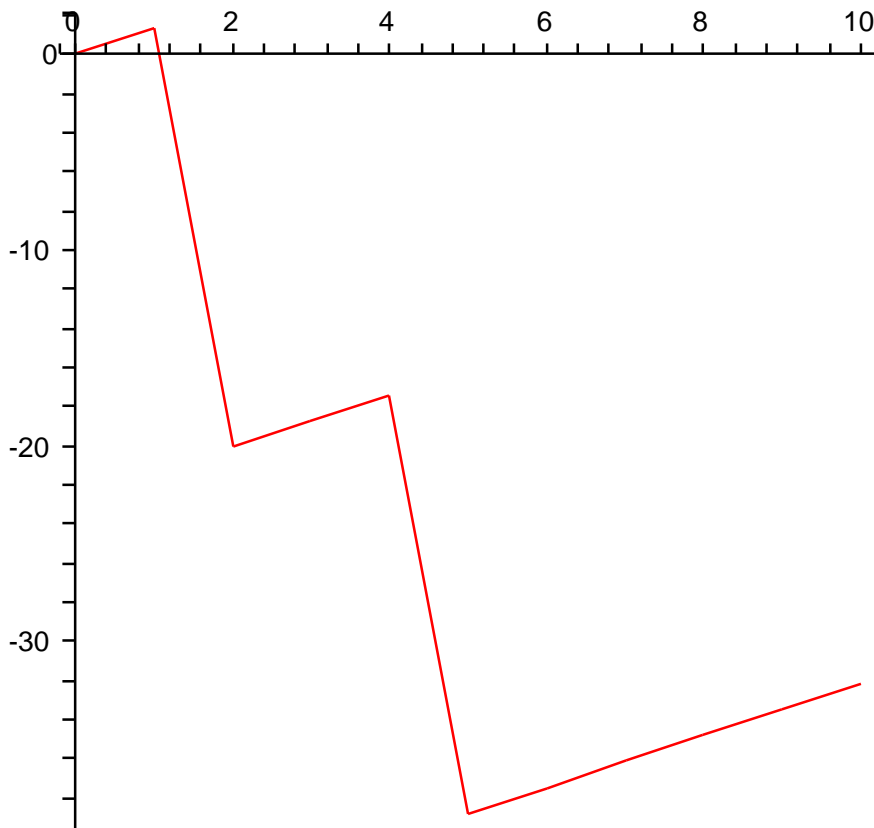


FIG. 1 – Discrétisation du phénomène

Pour simplifier, on discrétise le problème, l'unité de temps étant petite par rapport au phénomène observé, en considérant qu'entre l'instant $t = n$ et l'instant $t = n + 1$, la vitesse est constante, et que les changements se font uniquement aux temps $t = n$, et suivent les mêmes règles que ci-dessus. On désigne par l_n la longueur du filament à l'instant n , (donc $l_0 = 0$ et $l_1 = v_1$), par a_n la probabilité qu'entre l'instant n et l'instant

$n + 1$ la vitesse soit égale à v_1 , par b_n celle qu'entre l'instant n et l'instant $n + 1$, la vitesse soit v_2 . On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. Une illustration de cette discrétisation est présentée sur la figure 1, où l'axe des abscisses est gradué en unités de temps, et celles des ordonnées en unités de longueur (ici le micromètre). Le but est, dans un premier temps, de calculer l'espérance mathématique et la variance de la longueur du filament à l'instant n . Ensuite, en considérant que dans la réalité le filament disparaît lorsqu'il atteint une longueur virtuelle négative ou nulle, d'estimer la durée de vie réelle du filament par différentes approches.

1.3 Les étapes

Nous nous proposons donc de franchir les étapes suivantes :

- Calculer l'espérance de l_n en fonction de n , de p_1, p_2, v_1 , et v_2 ;
- Calculer de même la variance de l_n ;
- Faire une première approche de la durée de vie du filament grâce à l'espérance ;
- Faire une approximation normale de la loi de l_n et en déduire une autre approximation de la durée de vie du filament ;
- De même faire une approximation binomiale et en déduire une troisième approximation de la durée de vie du filament ;
- Faire une simulation informatique de la croissance du filament dans différentes situations numériques, et calculer dans ces mêmes situations les approximations qui sont décrites aux §4, 5 et 6 ;
- Comparer les résultats de la simulation informatique avec les différents résultats obtenus par ces approximations ;
- Donner une méthode d'approximation de la longueur moyenne du filament durant son existence.

2 Espérance

Dans cette partie, nous allons calculer l'espérance de l_n . Notons A_n (resp. B_n) les événements : “Le filament croît à la vitesse v_1 (resp. v_2) entre n et $n + 1$ ”. Ainsi, $P(A_n) = a_n$, et $P(B_n) = b_n$.

2.1 Calcul de a_n et b_n

D'après la formule des probabilités totales, les événements A_n et B_n formant un système complet, on obtient :

$$a_{n+1} = (1 - p_1)a_n + p_2b_n$$

et

$$b_{n+1} = p_1a_n + (1 - p_2)b_n$$

On remarque que $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n = \dots = a_0 + b_0 = 1$, ce qui permet d'exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et de même b_{n+1} en fonction de b_n . On obtient ainsi :

$$a_{n+1} = (1 - p_1)a_n + p_2(1 - a_n) = p_2 + (1 - s)a_n$$

et

$$b_{n+1} = p_1(1 - b_n) + (1 - p_2)b_n = p_1 + (1 - s)b_n,$$

en posant $s = p_1 + p_2$.

2.1.1 Utilisation des suites arithmético-géométriques

La résolution de ces deux suites arithmético-géométriques est classique et donne :

$$a_n = \frac{1}{s} (p_2 + (1 - s)^n p_1), \quad b_n = \frac{1}{s} (p_1 - (1 - s)^n p_1)$$

Pour le détail, on peut suivre les étapes suivantes :

1. Pour la suite a :
 - Poser $f(x) = p_2 + (1 - s)x$, fonction telle que $a_{n+1} = f(a_n)$
 - Montrer que f admet pour point fixe $\alpha = \frac{p_2}{s}$

- Définir la suite auxiliaire x définie par $x_n = a_n - \alpha$ et vérifier que x est une suite géométrique de raison $q = (1 - s)$ et de premier terme $x_0 = a_0 - \alpha = 1 - \alpha$, en déduire que

$$x_n = x_0 q^n = \left(1 - \frac{p_2}{s}\right)(1 - s)^n = \left(\frac{p_1}{s}\right)(1 - s)^n$$

- Enfin, conclure que

$$a_n = x_n + \alpha = \frac{p_2}{s} + \left(\frac{p_1}{s}\right)(1 - s)^n = \frac{1}{s}(p_2 + (1 - s)^n p_1)$$

- pour la suite b on procède de manière symétrique en échangeant les rôles de p_1 et p_2 et en remplaçant $a_0 = 1$ par $b_0 = 0$, α par $\beta = \frac{p_1}{s}$, x par $y = b - \beta$, et q restant inchangé, on obtient de même

$$y_n = y_0 q^n = \left(0 - \frac{p_1}{s}\right)(1 - s)^n = -\left(\frac{p_1}{s}\right)(1 - s)^n$$

$$b_n = y_n + \beta = \frac{p_1}{s} - \left(\frac{p_1}{s}\right)(1 - s)^n = \frac{1}{s}(p_1 - (1 - s)^n p_1)$$

Remarque : on pourra vérifier a posteriori que $a_n + b_n = 1$, ou au contraire utiliser cette relation pour obtenir directement b_n à partir de a_n .

2.1.2 Méthode matricielle

On désigne par X_n la matrice colonne :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

On a établi que

$$a_{n+1} = (1 - p_1)a_n + p_2 b_n$$

et

$$b_{n+1} = p_1 a_n + (1 - p_2)b_n$$

On obtient ainsi matriciellement :

$$X_{n+1} = M X_n$$

où M est la matrice carrée :

$$M = \begin{pmatrix} 1 - p_1 & p_2 \\ p_1 & 1 - p_2 \end{pmatrix}$$

Soit

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculons le produit MW_2 . On obtient, en rappelant que $p_1 + p_2 = s$:

$$MW_2 = \begin{pmatrix} 1 - s \\ -(1 - s) \end{pmatrix} = (1 - s)W_2$$

Donc $1 - s$ est valeur propre et W_2 est un vecteur propre associé.

La trace de M étant $2 - s$, 1 est valeur propre. Cherchons les vecteurs propres associés :

On résout l'équation $MX = X$ à l'inconnue matricielle $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et on obtient que l'ensemble des solutions est celui des matrices X de la forme λW_1 , où λ est un réel, et

$$W_1 = \begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs W_1 et W_2 formant clairement une base de \mathbb{R}^2 , la diagonalisation de M est terminée. Nous avons deux valeurs propres (distinctes car $s > 0$) : 1 et $1 - p_1 - p_2 = 1 - s$, associées respectivement aux vecteurs propres W_1 et W_2 .

La formule de changement de base est :

$$D = P^{-1}MP,$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-s \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} p_2 & 1 \\ p_1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le calcul de P^{-1} donne :

$$P^{-1} = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & -p_2 \end{pmatrix}$$

On en déduit $M = PDP^{-1}$, puis par récurrence immédiate : $M^n = PD^nP^{-1}$, pour tout entier naturel n .
Les calculs donnent :

$$M^n = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} p_2 + (1-s)^n p_1 & -p_2(-1 + (1-s)^n) \\ -p_1(-1 + (1-s)^n) & p_1 + (1-s)^n p_2 \end{pmatrix}$$

Enfin en tenant compte de $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$:

$$X_n = M^n X_0 = M^n = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} p_2 + (1-s)^n p_1 \\ p_1 - (1-s)^n p_1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on retrouve bien le résultat acquis par l'utilisation des suites arithmético-géométriques :

$$a_n = \frac{1}{s} (p_2 + (1-s)^n p_1), \quad b_n = \frac{1}{s} (p_1 - (1-s)^n p_1)$$

On pourra vérifier que $a_n + b_n = 1$.

2.2 Calcul de l'espérance de l_n

On note $\Delta_k = l_{k+1} - l_k$, pour tout k supérieur ou égal à 0. Ainsi :

$$l_n = (l_n - l_{n-1}) + \dots + (l_1 - l_0) + l_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k + l_0$$

L'espérance de Δ_k , qui vaut v_1 avec une probabilité a_k et v_2 avec une probabilité b_k , est :

$$\mathbb{E}(\Delta_k) = a_k v_1 + b_k v_2,$$

pour tout entier naturel k .

D'où par linéarité :

$$\mathbb{E}(l_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(\Delta_k) + \mathbb{E}(l_0) = v_1 \sum_{k=0}^{n-1} a_k + v_2 \sum_{k=0}^{n-1} b_k + l_0$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{s} \left(np_2 + \frac{1}{s} (1 - (1-s)^n) p_1 \right)$$

et de même pour b . Finalement, on obtient :

$$\mathbb{E}(l_n) = v_1 \frac{1}{s} \left(np_2 + \frac{1}{s} (1 - (1-s)^n) p_1 \right) + v_2 \frac{1}{s} \left(np_1 - \frac{1}{s} (1 - (1-s)^n) p_1 \right) + l_0$$

ou encore, en tenant compte de $l_0 = 0$

$$\mathbb{E}(l_n) = \frac{v_1}{s} \left(np_2 + \frac{(1 - (1-s)^n) p_1}{s} \right) + \frac{v_2}{s} \left(np_1 - \frac{(1 - (1-s)^n) p_1}{s} \right)$$

3 Variance

On s'intéresse à la variance de l_n (i.e. pour simplifier de $l_n - l_0$). On a :

$$\text{Var}(l_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(\Delta_i \Delta_j) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(\Delta_k) \right)^2, \quad (1)$$

où \mathbb{E} désigne l'espérance.

On connaît déjà la quantité $\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(\Delta_k)$ qui vaut l'espérance de $l_n - l_0 = l_n$

Il reste à calculer la première quantité dans le terme de droite de l'égalité (1). On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(\Delta_i \Delta_j) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(\Delta_i^2) + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E}(\Delta_i \Delta_j) \\ &= A + B. \end{aligned}$$

Calcul de A.

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i v_1^2 + b_i v_2^2,$$

qui s'exprime en fonction des p_1, p_2, v_1 et v_2 en reprenant l'expression de la somme des a_i déjà calculée :

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i = \frac{1}{s} \left(np_2 + \frac{1}{s} (1 - (1-s)^n) p_1 \right)$$

ainsi que l'expression analogue de la somme des b_i , on obtient :

$$A = \frac{v_1^2}{s} \left(np_2 + \frac{(1 - (1-s)^n) p_1}{s} \right) + \frac{v_2^2}{s} \left(np_1 - \frac{(1 - (1-s)^n) p_1}{s} \right)$$

Calcul de B. Remarquons tout d'abord que pour $i < j$:

$$\mathbb{E}(\Delta_i \Delta_j) = \mathbb{E}(\Delta_i \mathbb{E}(\Delta_j | \Delta_i)),$$

ce qui peut se montrer en passant par la formule de Bayes. Notons $j = i + k$. On a

$$\mathbb{E}(\Delta_j | \Delta_i = d) = v_1 p^k(v_1 | d) + v_2 p^k(v_2 | d),$$

où $p^k(y|x)$ est la probabilité de passer de la vitesse x à la vitesse y en k instants. Deux cas sont alors possibles :

- Lorsque $x = v_1$: pour $y = v_1$, $p^k(v_1 | v_1) = a_k$, et pour $y = v_2$, $p^k(v_2 | v_1) = b_k$.
- Lorsque $x = v_2$: on reprend exactement les formules établies lors du calcul de l'espérance pour a_k et b_k en changeant $l_1 = v_1$ par $l_1 = v_2$ comme condition initiale. Notons alors \tilde{a}_k et \tilde{b}_k les deux probabilités $p^k(v_1 | v_2)$ et $p^k(v_2 | v_2)$ (On a $\tilde{a}_k = 1 - \tilde{b}_k$). On peut utiliser par exemple les formules des suites arithmético-géométriques pour les calculer, la seule différence étant la condition initiale des suites \tilde{a} et \tilde{b} qui est $\tilde{a}_0 = 0, \tilde{b}_0 = 1, \tilde{a}_1 = p_2$ et $\tilde{b}_1 = 1 - p_2$ (au lieu de $a_0 = 1, b_0 = 0, a_1 = 1 - p_1$ et $b_1 = p_1$).

On obtient donc après ce calcul, pour tout entier naturel k :

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{s} (p_2 - (1-s)^k p_2), \quad \tilde{b}_k = \frac{1}{s} (p_1 + (1-s)^k p_2)$$

Remarquons que ces deux résultats s'obtiennent aussi instantanément soit en échangeant les lettres a et b ainsi que p_1 et p_2 dans les expressions de a_k et b_k , ou encore en appliquant la formule matricielle $\tilde{X}_n = M^n \tilde{X}_0$, où M est la matrice introduite au §2.1.2, \tilde{X}_n la matrice colonne :

$$\tilde{X}_n = \begin{pmatrix} \tilde{a}_n \\ \tilde{b}_n \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{X}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{b}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Au final on trouve donc pour $j = i + k$:

$$\mathbb{E}(\Delta_i \Delta_j) = v_1 \{v_1 a_k + v_2 b_k\} a_i + v_2 \{v_1 \tilde{a}_k + v_2 \tilde{b}_k\} b_i.$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Var}(l_n) = & \sum_{i=0}^{n-1} \{a_i v_1^2 + b_i v_2^2\} + 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1-i} \{v_1 (v_1 a_k + v_2 b_k) a_i \\ & + v_2 (v_1 \tilde{a}_k + v_2 \tilde{b}_k) b_i\} - (\mathbb{E}(l_n) - l_0)^2 \end{aligned}$$

ou encore

$$\text{Var}(l_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \{a_i v_1^2 + b_i v_2^2\} + 2 \left(\sum_{0 \leq i < j \leq n-1} \{v_1 (v_1 a_{j-i} + v_2 b_{j-i}) a_i + v_2 (v_1 \tilde{a}_{j-i} + v_2 \tilde{b}_{j-i}) b_i\} \right) - (\mathbb{E}(l_n))^2.$$

Ainsi, nous avons bien calculé la variance de l_n en fonction uniquement des données : v_1, v_2, p_1, p_2, n . En effet, nous connaissons $a_k, b_k, \tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ en fonction de v_1, v_2, p_1, p_2, k , et $\mathbb{E}(l_n)$ en fonction de v_1, v_2, p_1, p_2, n d'après les calculs antérieurs.

4 Première approche de la durée de vie

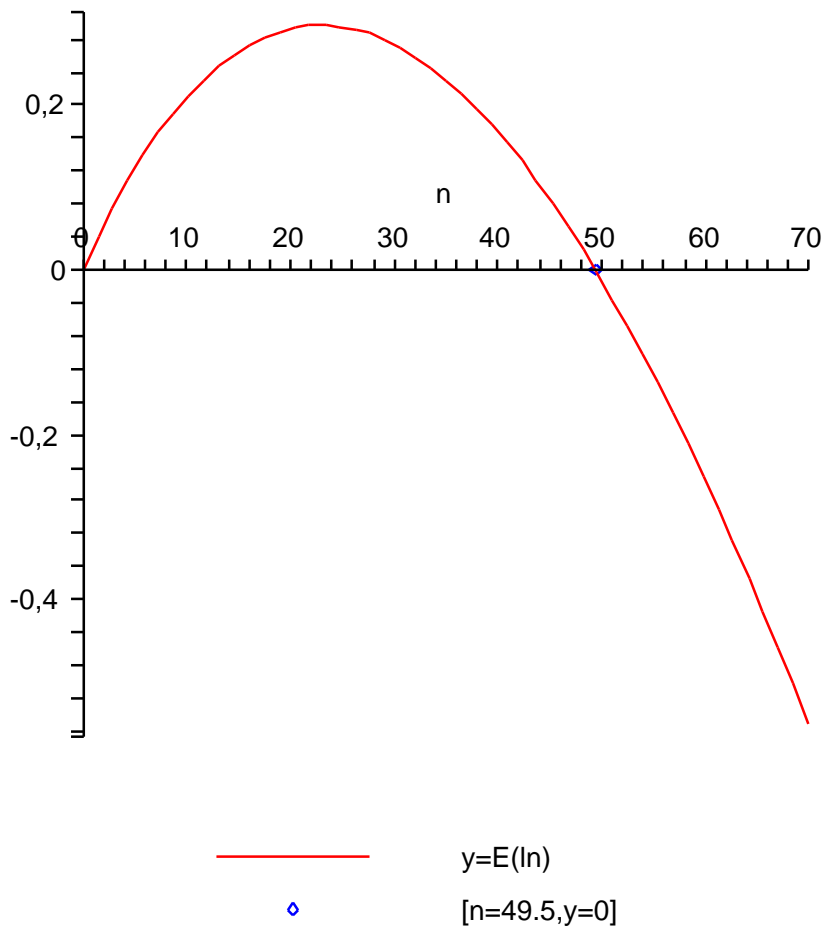


FIG. 2 – Recherche du premier n tel que $\mathbb{E}(l_n) < 0$. Essai 2

Le calcul seul de l'espérance de l_n permet une première approche de la durée de vie du filament, en recherchant le premier n tel que $\mathbb{E}(l_n) < 0$. En effet, lorsqu'on étudie les variations de $\mathbb{E}(l_n)$ en fonction de n , que

l'on prolonge à \mathbb{R}_+ , et que l'on note f_1 , on constate que f_1 commence par croître, passe par un maximum, puis décroît pour passer une première fois par la valeur 0. Lorsque $\mathbb{E}(l_n)$ devient négatif, on peut penser que le filament a disparu, le poids des longueurs négatives l'emportant sur les positives, en moyenne

Le premier temps T_0 où $\mathbb{E}(l_n)$ est négatif est donc un premier indicateur de la durée de vie du filament. Les expériences numériques nous diront s'il est performant ou pas.

La figure 2 donne la courbe représentant $\mathbb{E}(l_n)$ en fonction de n dans le cas étudié en 7.1 (deuxième essai), les axes de la figure étant toujours gradués comme à la figure 1 : en abscisse, en unité de temps, soit ici 2 secondes, et en ordonnée en unité de longueur : ici le micromètre.

5 Approximation normale

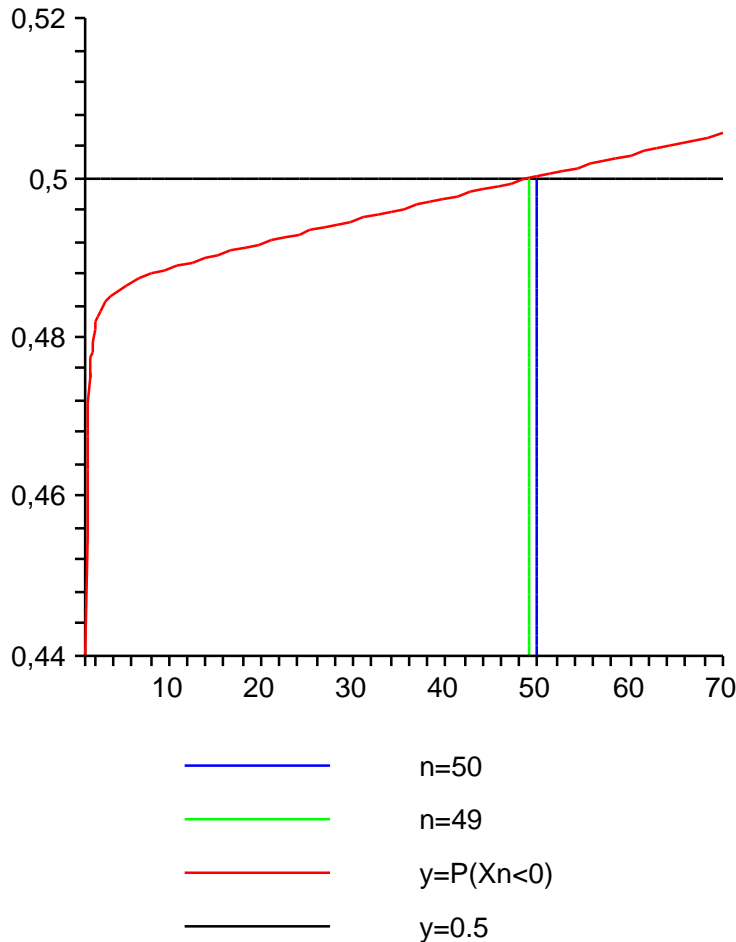


FIG. 3 – Recherche du premier n tel que $\Phi\left(\frac{-m}{\sigma}\right) > 0.5$. (Essai 2)

Maintenant, nous disposons de l'espérance et aussi de la variance de l_n . On cherche toujours à estimer la durée de vie du filament, c'est à dire le premier instant $n = N_0$ où l_n est négatif ou nul, qui correspondrait en réalité à la disparition effective du filament biologique.

Pour cela, on approche la loi de l_n par une loi normale de moyenne $m = \mathbb{E}(l_n)$ et d'écart-type celui de l_n , noté $\sigma = \sqrt{\text{Var}(l_n)}$. Soit X_n une telle variable aléatoire.

Alors, $X = \frac{X_n - m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite, de fonction de répartition Φ ce qui permet d'approcher la probabilité de l'événement ($l_n \leq 0$) par

$$P(X_n \leq 0) = P(\sigma X + m \leq 0) = P\left(X \leq \frac{-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{-m}{\sigma}\right).$$

En utilisant cette approximation, on en déduit, en cherchant le premier t pour lequel cette approximation normale donne une probabilité supérieure à 0.5, une approximation T_1 de la durée de vie N_0 du filament.

La figure 3 montre la courbe représentant $\Phi\left(\frac{-m}{\sigma}\right)$ en fonction de n dans le cas étudié en 7.2 (deuxième essai), les axes de la figure étant gradués comme suit : en abscisse, en unité de temps, soit ici 2 secondes, les mesures en laboratoire ayant lieu toutes les 2 secondes, et en ordonnées, il n'y a pas d'unité, la représentation étant celle d'une probabilité.

6 Approximation binomiale

Ici, nous allons essayer d'approcher la loi de l_n par une loi binomiale.

En effet, si l'on note k le nombre de fois que le filament a vu sa taille augmenter entre $t = 1$ et $t = n$, la longueur l_n est aussi donnée par la formule :

$$l_n = v_1 + kv_1 + (n - 1 - k)v_2.$$

En effet, entre $t = 0$ et $t = 1$ le filament augmente forcément. Donc :

$$l_n = v_1 + (n - 1)v_2 + k(v_1 - v_2)$$

Ce qui nous amène à poser pour $n \geq 1$,

$$l_n = v_1 + (n - 1)v_2 + Y_n(v_1 - v_2)$$

et à approcher la loi de Y_n par celle d'une loi binomiale de paramètre

$$((n - 1), p_n = \mathbb{E}(Y_n)/(n - 1)),$$

de sorte que l'espérance de celle-ci soit celle de Y_n , et en supposant que p_n soit bien compris entre 0 et 1, ce qui se vérifiera quasiment tout le temps sur les exemples numériques qui ont été utilisés.

La figure 4 illustre cette vérification dans le cas étudié au 7.2 (deuxième essai), les axes étant gradués comme à la figure 3.

Si donc on note Y_n une variable aléatoire suivant cette loi binomiale, et F_{Y_n} sa fonction de répartition, on peut approcher la probabilité de l'événement ($l_n \leq 0$) par

$$P(v_1 + (n - 1)v_2 + Y_n(v_1 - v_2) \leq 0) = P\left(Y_n \leq \frac{-v_1 - (n - 1)v_2}{v_1 - v_2}\right) = F_{Y_n}\left(\frac{-v_1 - (n - 1)v_2}{v_1 - v_2}\right) = B(n).$$

Rappelons que $v_1 > 0$ et $v_2 < 0$

Là encore, on obtient une estimation T_2 de la durée de vie réelle N_0 du filament en cherchant le premier temps n pour lequel $F_{Y_n}\left(\frac{-v_1 - (n - 1)v_2}{v_1 - v_2}\right)$ est supérieur à 0.5. Les expériences nous diront si elle est intéressante ou pas.

La figure 5 donne la courbe représentant $B(n) = F_{Y_n}\left(\frac{-v_1 - (n - 1)v_2}{v_1 - v_2}\right)$ en fonction de n dans le cas étudié en 7.2 (deuxième essai), les axes de la figure étant gradués comme à la figure 3

7 Comparaison des différentes méthodes d'approximation

Nous allons examiner de près les résultats sur trois essais, pour lesquels les valeurs des paramètres v_1, v_2, p_1, p_2 correspondent à ceux d'une expérience biologique véritable. Pour chaque essai, nous noterons N_1 la durée de vie calculée par une simulation informatique, basée dans chaque cas sur la moyenne sur 4000 essais, T_0 le premier t tel que $f_1(t) \leq 0$, T_1 l'approximation normale et T_2 l'approximation binomiale obtenues par les méthodes décrites aux 5 et 6. Dans les trois essais, l'unité de temps choisie est de 2 secondes, et les résultats sont donnés à la seconde près.

7.1 Premier essai

Pour la première série de valeurs suivantes :

$$v_1 = 0,044667 \text{ micromètre par unité de temps,}$$

$$v_2 = -0,761333 \text{ micromètre par unité de temps,}$$

$$p_1 = 0,0015,$$

$$p_2 = 0,017067,$$

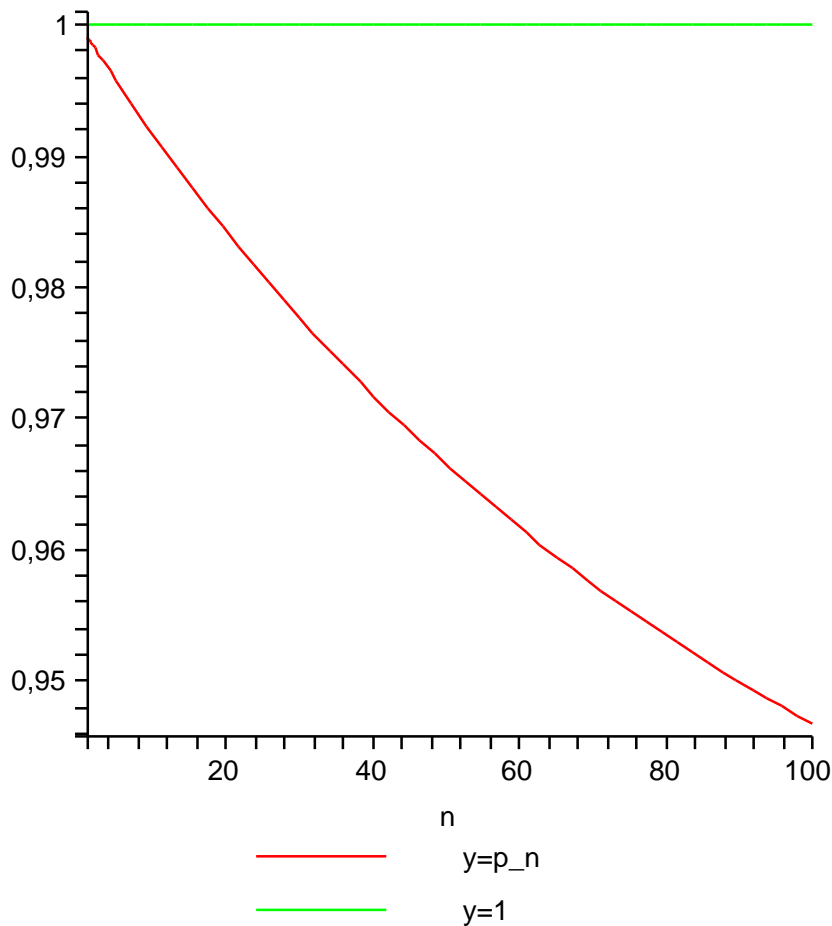
nous avons obtenu les résultats suivants :

$$N_1 = 171 \text{ unités de temps soit } 342 \text{ secondes,}$$

$$T_0 = 164 \text{ unités de temps soit } 328 \text{ secondes,}$$

$$T_1 = 170 \text{ unités de temps soit } 340 \text{ secondes,}$$

$$T_2 = 172 \text{ unités de temps soit } 344 \text{ secondes.}$$

FIG. 4 – vérification de la relation $0 < p_n < 1$. Essai 2

7.2 Deuxième essai

Pour la deuxième série de valeurs :

$v_1 = 0,027$ micromètre par unité de temps,

$v_2 = -0,802667$ micromètre par unité de temps,

$p_1 = 0,001733$,

$p_2 = 0,015333$,

nous avons obtenu les résultats suivants, illustrés sur les figures 2, 3 et 4 :

$N_1 = 49,5$ unités de temps soit 99 secondes,

$T_0 = 49,5$ unités de temps soit 99 secondes,

$T_1 = 49$ unités de temps soit 98 secondes,

$T_2 = 49,5$ unités de temps soit 99 secondes.

7.3 Troisième essai

Pour la troisième série de valeurs suivantes :

$v_1 = 0,044333$ micromètre par unité de temps,

$v_2 = -0,713$ micromètre par unité de temps,

$p_1 = 0,0083$

$p_2 = 0,022333$

nous avons obtenu les résultats suivants :

$N_1 = 19$ unités de temps soit 38 secondes,

$T_0 = 17$ unités de temps soit 34 secondes,

$T_1 = 18$ unités de temps soit 36 secondes,

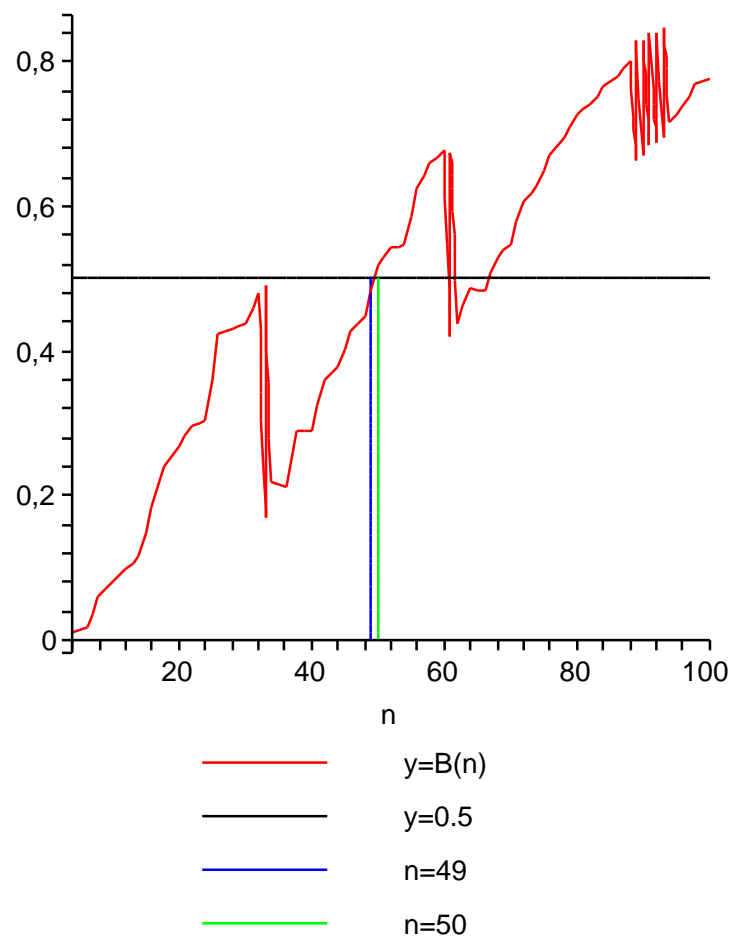


FIG. 5 – approximation binomiale. Essai 2

$T_2 = 17$ unités de temps soit 34 secondes.

7.4 Synthèse

Dans chacun des trois cas on remarque que les quatre valeurs N_1, T_0, T_1, T_2 sont du même ordre de grandeur. Ces résultats sont approximatifs, surtout ceux de la simulation informatique. En effet, le choix de la fonction de hasard dans la programmation, le choix de la durée de la simulation, c'est à dire le nombre d'unités de temps auquel on a arrêté la simulation (qui a été choisie de l'ordre de 2 fois la durée de vie estimée par T_0), celui qui a été fait d'écartier les filaments non disparus de la statistique pour le calcul de N_1 , autant de raisons de faire fluctuer le résultat de la simulation informatique.

Par ailleurs, pour l'approximation binomiale, qui semblait au départ plus proche de la réalité, l'interprétation est plus difficile à cause des oscillations de la courbe (cf. figure 5).

Celle de l'approximation normale est plus simple, mais est-elle plus fiable ? Rien ne le dit a priori.

Ce que l'on peut dire, c'est que sur les essais pratiqués, les écarts entre les différentes valeurs sont du même ordre de grandeur, inférieurs à 8 unités de temps dans le premier essai, soit 16 secondes et à 1 puis 2 unités de temps, soit 2 puis 4 secondes dans les deux derniers. Quant à l'écart maximum relatif entre les 4 indicateurs, pour chaque essai, il est de l'ordre de :

0.05 (premier essai) ,

0.01 (deuxième essai),

et 0.11 (dernier essai).

Nous avons donc pu répondre au moins partiellement à la problématique posée : avoir une approximation de la durée de vie du filament.

8 Approximation de la longueur moyenne du filament durant son existence

8.1 Les formules

- On peut faire le calcul de la valeur moyenne de $\mathbb{E}(l_n)$ pour n variant de 1 à N , qui représente aussi l'espérance de la moyenne des longueurs des filaments du temps $t = 1$ au temps $t = N$, soit

$$M = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{E}(l_n)$$

qui peut aussi être approchée par l'intégrale :

$$I = 2 \int_0^N f_1(t) dt$$

avec les notations du 4.

On notera la présence du 2, qui est due à l'unité de temps choisie égale à 2 secondes, ce qui n'est pas très habituel mais correspond à l'expérience biologique. En appliquant ces calculs à $N = \frac{N_0 + T_0 + T_1 + T_2}{4}$, exprimé en unité de temps, soit la moitié de sa valeur en secondes, arrondi au plus proche entier, on obtient une approximation de la moyenne des longueurs des filaments durant leur vie

Sur les trois essais, M et I sont effectivement très proches. Lorsqu'ils ne le sont pas, on prendra leur moyenne pour valeur "calculée" de la longueur moyenne recherchée. Elle sera notée LMC (pour longueur moyenne calculée).

- La simulation informatique permet aussi d'avoir une estimation numérique de la longueur moyenne du filament pendant sa durée de vie (parmi les filaments qui disparaissent).

On a obtenu comme estimation numérique de cette longueur moyenne par la simulation informatique, en utilisant la moyenne arithmétique des longueurs moyennes simulées (des filaments qui disparaissent) obtenues pour une suite d'expériences dont la durée k varie de n_0 à $2 * N - n_0 + 1$, chaque suite comportant 100 essais.

La présence du n_0 , qui sera choisi chaque fois aussi petit que possible, est due à des essais qui, lorsque leur durée est trop courte, ne comporte que des filaments qui ne disparaissent pas, ce qui empêche de calculer la moyenne sur ceux qui disparaissent puisqu'il n'y en a pas, et conduit à un échec de la tentative. Et on a symétrisé la durée des essais informatiques par rapport à N , afin de respecter la convention que l'on a prise au 7.4, en compensant l'absence des mesures avant n_0 par celle des mesures après $2 * N - n_0 + 1$. Cette valeur est notée LMI (pour longueur moyenne informatique) et est calculée à 10^{-3} près au plus proche.

8.2 Les résultats

- Pour le premier essai,
 $N = 171$, $LMI = 1.683$ et $I = 1.417$, $M = 1.417$ micromètres soit $LMC = 1.417$ à 10^{-3} près.
- Pour le second,
 $N = 49$, $LMI = 0.358$ $I = 0.398$, $M = 0.398$ donc $LMC = 0.398$ à 10^{-3} près.
- Enfin pour le troisième,
 $N = 18$, $LMI = 0.224$ et $I = 0.241$, $M = 0.243$ donc $LMC = 0.242$ à 10^{-3} près.

Ordre de grandeur des erreurs relatives $\frac{2|LMI-LMC|}{LMI+LMC}$:

- Essai 1 : 0.17
- Essai 2 : 0.1
- Essai 3 : 0.08

On peut donc considérer que, dans les cas étudiés, cette méthode de calcul permet une assez bonne approche de la longueur moyenne des filaments durant leur vie, surtout dans les deux derniers essais.

9 Conclusion

Nous avons donc pu répondre à la problématique posée : avoir une approximation de la durée de vie du filament, et calculer la longueur moyenne du filament durant sa vie, et ce de façon théorique, grâce au modèle décrit au 1.2. Nous avons aussi validé le fait que ces valeurs théoriques approchent de façon assez satisfaisante, dans au moins 2 des 3 cas numériques étudiés, les valeurs moyennes obtenues par simulation

informatique. Pour le cas restant, l'approximation est de moins bonne qualité. (Au troisième essai pour l'estimation de la durée de vie, et au premier essai pour l'estimation de la longueur moyenne du filament durant sa vie). A défaut d'avoir une majoration théorique des erreurs commises dans les différentes approximations, ce qui serait mathématiquement plus satisfaisant, il resterait à recommencer des expériences un grand nombre de fois en faisant varier les 4 paramètres v_1, v_2, p_1, p_2 , pour voir avec quelle précision ces approximations resteraient valables.