

Trichotomie et maximum d'une fonction

Henri ROLAND

Mai 2010

Ce document fait suite au document intitulé : L'algorithme de dichotomie dont nous vous conseillons la lecture préalable.

1) Le problème

On considère la fonction f définie sur $[-2 ; 1]$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x$.

Le tableau de variations de f sur $[-2 ; 1]$ est donné ci-contre.

x	-2	x_0	1
		$f(x_0)$	
	-16		-7

On veut donner une valeur approchée de x_0 .

1) Prenons $a = -2$ et $b = 1$ et posons $h = \frac{b-a}{3} = 1$ puis $c = a + h = -1$ et $d = c + h = 0$.

On a ainsi divisé l'intervalle $[a ; b]$ en trois parties de même longueur.

On calcule $f(c) = 1$ et $f(d) = 0$

a) Les résultats obtenus permettent-ils de dire lequel des trois intervalles $[a ; c]$ $[c ; d]$ $[d ; b]$ contient x_0 ?

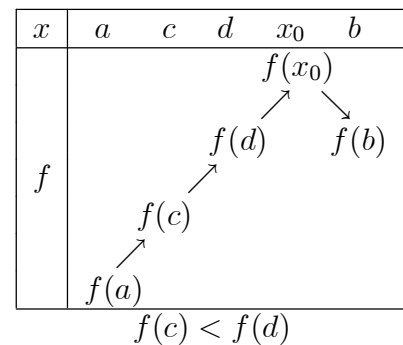
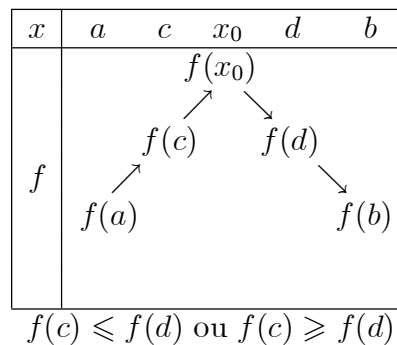
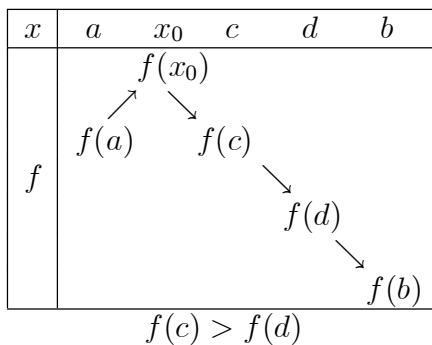
b) Les résultats obtenus permettent-ils de dire lequel des trois intervalles $[a ; c]$ $[c ; d]$ $[d ; b]$ ne contient pas x_0 ?

c) Donner un intervalle I inclus dans $[a ; b]$ et qui contient le nombre x_0 .

2) Reprendre la méthode initiée au 1) en prenant $[a ; b] = I$ et obtenir un nouvel encadrement de x_0 .

Si on répète encore deux fois la méthode, quelle sera alors la longueur de l'encadrement de x_0 obtenu ?

Pour répondre aux questions a) et b) dans un cas plus général, on est amené à étudier plusieurs cas :



Conclusion

Si $f(c) \leq f(d)$ alors $x_0 \notin [a ; c[$ et $x_0 \in [c ; b]$

Si $f(c) \geq f(d)$ alors $x_0 \notin]d ; b]$. et $x_0 \in [a ; d]$

2) L'algorithme

En s'appuyant sur les résultats précédents, écrivons un algorithme permettant de calculer un encadrement de x_0 à une précision donnée.

A, B, E et f sont donnés.

```

Tant que B-A ≥ E Faire
    H ← (B-A) / 3
    C ← A+H
    D ← B-H
    Si f(C) ≤ f(D) alors
        A ← C
    Si f(C) ≥ f(D) alors
        B ← D
Afficher(A,B)

```

Ecriture du programme correspondant

Dans tous les cas on doit s'assurer que l'on utilise le programme dans une situation favorable, c.à.d. que la fonction est continue sur l'intervalle $[a ; b]$, croissante sur $[a ; x_0]$ et décroissante sur $[x_0 ; b]$.

Pour le programme sur TI 82 on suppose que la fonction ($x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 6x$) a été préalablement entrée dans la variable Y1.

Programmation sur TI 82	Programmation en Python 2.6
<pre> :Prompt A :Prompt B :Prompt E :While B-A ≥ E :(B-A)/3 → H :A+H → C :B-H → D :If Y1(C) ≤ Y1(D) :Then :C → A :End :If Y1(C) ≥ Y1(D) :Then :D → B :End :End :Disp("A=",A) :Disp("B=",B) </pre>	<pre> def f(x): return 2*x**3-3*x**2-6*x A=input('A=') B=input('B=') E=input('Précision =') while B-A >= E : H=(B-A)/3. C=A+H D=B-H if f(C) <= f(D): A=C if f(C) >= f(D) : B=D print('Un maximum entre ',A, 'et ',B) </pre>