Trichotomie et maximum d'une fonction

Henri ROLAND
Mai 2010

Ce document fait suite au document intitulé : L'algorithme de dichotomie dont nous vous conseillons la lecture préalable.

1) Le problème

On considère la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 1]$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x$.
Le tableau de variations de f sur $[-2\ ;\ 1]$ est donné ci-contre.

x	-2		x_0		1
			$f(x_0)$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	-16				-7

On veut donner une valeur approchée de x_0.
1) Prenons $a = -2$ et $b = 1$ et posons $h = \dfrac{b-a}{3} = 1$ puis $c = a + h = -1$ et $d = c + h = 0$.
On a ainsi divisé l'intervalle $[a\ ;\ b]$ en trois parties de même longueur.
On calcule $f(c) = 1$ et $f(d) = 0$

a) Les résultats obtenus permettent-ils de dire lequel des trois intervalles $[a\ ; c]$ $[c\ ;\ d]$ $[d\ ;\ b]$ contient x_0 ?

b) Les résultats obtenus permettent-ils de dire lequel des trois intervalles $[a\ ; c]$ $[c\ ;\ d]$ $[d\ ;\ b]$ ne contient pas x_0 ?

c) Donner un intervalle I inclus dans $[a\ ;\ b]$ et qui contient le nombre x_0.

2) Reprendre la méthode initiée au 1) en prenant $[a\ ;\ b] = I$ et obtenir un nouvel encadrement de x_0.
Si on répète encore deux fois la méthode, quelle sera alors la longueur de l'encadrement de x_0 obtenu ?

Pour répondre aux questions a) et b) dans un cas plus général, on est amené à étudier plusieurs cas :

x	a		x_0		c		d		b
			$f(x_0)$						
		$\nearrow$		$\searrow$					
f	$f(a)$				$f(c)$				
						$\searrow$			
							$f(d)$		
								$\searrow$	
									$f(b)$

$f(c) > f(d)$

x	a		c		x_0		d		b
					$f(x_0)$				
				$\nearrow$		$\searrow$			
f			$f(c)$				$f(d)$		
		$\nearrow$						$\searrow$	
	$f(a)$								$f(b)$

$f(c) \leqslant f(d)$ ou $f(c) \geqslant f(d)$

x	a		c		d		x_0		b
							$f(x_0)$		
						$\nearrow$		$\searrow$	
f					$f(d)$				$f(b)$
				$\nearrow$					
			$f(c)$						
		$\nearrow$							
	$f(a)$								

$f(c) < f(d)$

Conclusion
Si $f(c) \leqslant f(d)$ alors $x_0 \notin [a\ ;\ c[$ et $x_0 \in [c\ ;\ b]$
Si $f(c) \geqslant f(d)$ alors $x_0 \notin]d\ ;\ b]$.et $x_0 \in [a\ ;\ d]$

2) L'algorithme

En s'appuyant sur les résultats précédents, écrivons un algorithme permettant de calculer un encadrement de x_0 à une précision donnée.

A, B, E et f sont donnés.

```
Tant que B-A≥E Faire
    H⟵(B-A)/3
    C⟵A+H
    D⟵B-H
    Si f(C)⩽f(D) alors
        A⟵C
    Si f(C)⩾f(D) alors
        B⟵D
Afficher(A,B)
```

Ecriture du programme correspondant

Dans tous les cas on doit s'assurer que l'on utilise le programme dans une situation favorable, c.à.d. que la fonction est continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, croissante sur $[a\ ;\ x_0]$ et décroissante sur $[x_0\ ;\ b]$.

Pour le programme sur TI 82 on suppose que la fonction $(x \longmapsto 2x^3 - 3x^2 - 6x)$ a été prélablement entrée dans la variable Y1.

Programmation sur TI 82

```
:Prompt A
:Prompt B
:Prompt E
:While B-A≥E
:(B-A)/3→H
:A+H→C
:B-H→D
:If Y1(C)⩽Y1(D)
:Then
:C→A
:End
:If Y1(C)⩾Y1(D)
:Then
:D→B
:End
:End
:Disp("A=",A)
:Disp("B=",B)
```

Programmation en Python 2.6

```
def f(x):
      return 2*x**3-3*x**2-6*x

A=input('A=')
B=input('B=')
E=input('Précision =')
while B-A>=E :
      H=(B-A)/3.
      C=A+H
      D=B-H
      if f(C)<=f(D):
            A=C
      if f(C)>=f(D) :
            B=D
print('Un maximum entre ',A, 'et ',B)
```