La méthode de la corde

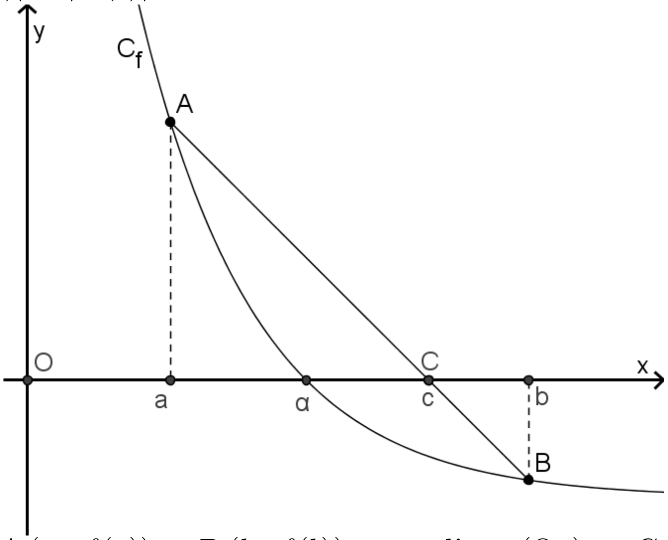
Groupe algorithmique de l'IREM d'Aix-Marseille
Henri ROLAND 2010-2011

1) Position du problème

Soit f une fonction dérivable et convexe sur un intervalle $[a;b]$.
On suppose que l'équation $f(x)=0$ admet une racine unique α sur l'intervalle $[a;b]$.

La méthode

Pour simplifier supposons que $f(a)>0$ et $f(b)<0$.
La fonction étant convexe, sa dérivée est donc croissante sur $[a;b]$.
Supposons que $|f'(a)| \geq |f'(b)|$.

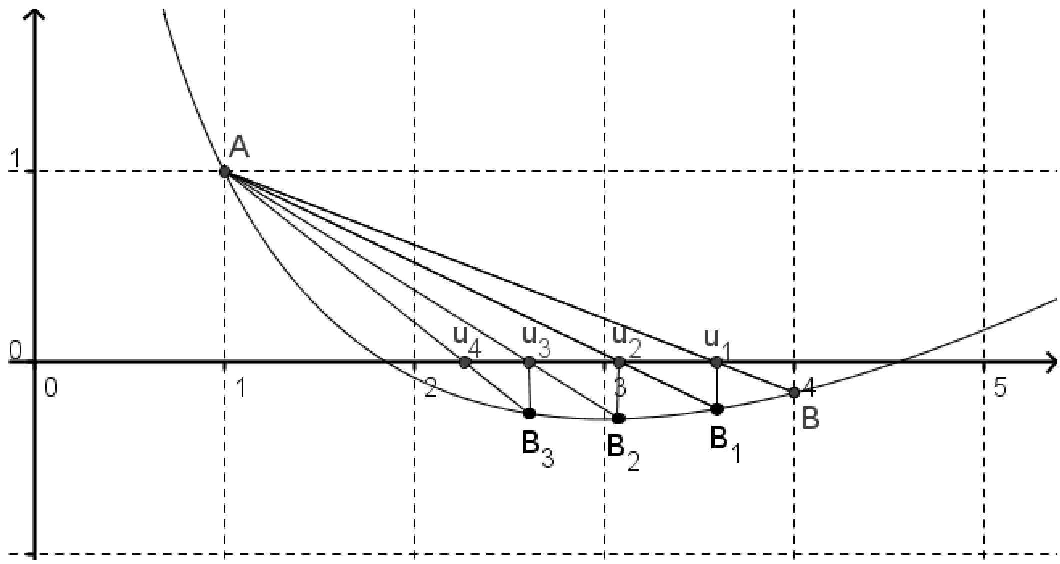


La corde [AB] avec A $(a\,;\,f(a))$ et B $(b\,;\,f(b))$ coupe l'axe (Ox) en C $(c\,;\,0)$ et $c\in[\alpha;b]$.
Les points A, B et C sont alignés donc $\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ soit $\dfrac{-f(a)}{c-a}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
d'où $c=a-\dfrac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$ ou encore $c=\dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

La méthode de la corde (ou de Lagrange) consiste à itérer le processus en remplaçant la corde [AB] par la corde $[AB_1]$ avec $B_1\,(c\,;\,f(c))$ et ainsi de suite.

2) Visualisation avec Geogebra

On cherche à résoudre l'équation $f(x)=0$ avec $f(x)=x-3\ln x$ avec $a=1$ et $b=4$



3) Mise en place de la suite récurrente

$u_{n+1} = a - \dfrac{(u_n - a)f(a)}{f(u_n) - f(a)}$ et $u_0 = b$

Conditions d'utilisation

La convergence vers α est acquise lorsque f''conserve un signe constant sur l'intervalle $[a; b]$ (f convexe ou concave) et dans le cas où $|f'(b)| \geq |f'(a)|$, il faudra échanger les rôles des points A et B.

Test d'arrêt

La suite étant monotone, on ne peut pas obtenir d'encadrement de la racine α, il faut donc utiliser un test d'arrêt de la forme $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$ pour ε donné.

Algorithme

- f, a, b et la précision ε sont donnés
- L désigne la liste des termes de la suite
- n désigne le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la précision ε.
- L'évaluation répétée de $f(a)$ pouvant ralentir les calculs, cette valeur est stockée dans la variable t et ce calcul n'est effectué qu'une seule fois.

$L \longleftarrow \{b\}$
$n \longleftarrow 0$
$t \longleftarrow f(a)$
$c \longleftarrow a$
Tant que $abs(b - c) > \varepsilon$ **faire**
  $c \longleftarrow b$
  $b \longleftarrow a - \dfrac{(b-a) \times t}{f(b) - t}$
  $n \longleftarrow n + 1$
  $L \longleftarrow L$ suivie de b
Afficher n
Afficher L

Programme sur TI 82 Stats

La fonction f a d'abord été saisie dans la variable Y_1 du menu $\boxed{f(x)}$ de la calculatrice.

```
PROGRAM : LAGRANGE
:Input "BORNE FIXE",A
:Input "U0=",B
:Input "PRECISION=",E
:ClrList L₁
:{B}→L₁
:0→N
:Y1(A)→T
:A→C
:While Abs(B-C)>E
:B→C
:A-(B-A)*T/(Y1(B)-T)→B
:N+1→N
:Chaîne(L₁,{B})→L₁
:End
:Disp "N=",N
:Disp L₁
```

Remarque
La rapidité de convergence de la méthode de la corde est de type géométrique et on a $|u_{n+1} - \alpha| \sim k\ |u_n - \alpha|$.
Voir le document intitulé Evaluation expérimentale de la rapidité de convergence d'une suite
Auteur : Henri ROLAND Groupe algorithmique de l'IREM d'Aix-Marseille