Expérience aléatoire et modélisation

Henri ROLAND
Mai 2010

1) Présentation de l'expérience

Le jeu
Pierre dispose d'un jeton dont les faces portent les numéros 1 et 2.
Sur la case marquée D (Départ) de la grille ci-dessous on a disposé un pion.
Pierre lance son jeton puis avance le pion du nombre de cases indiqué par le jeton. Ensuite il renouvelle l'expérience jusqu'à ce que le pion arrive sur une case marquée A (Arrivée).
On s'intéresse au nombre N d'étapes nécessaires pour aller de D à A.

0	1	2	3	4	5
D				A	A

L'étude
On se propose d'étudier la loi de probabilité de N.
Pour cela on va d'abord réaliser P simulations successives de l'expérience aléatoire et faire un traitement statistique des résultats, ce qui permettra de conjecturer un modèle.
On pourra ensuite valider le modèle en utilisant un arbre de probabilités.

2) Réalisation d'une partie

Variables

Désignons par I la position du pion, J la valeur affichée par le jeton, N le nombre d'étapes déjà jouées.

Algorithme de "jouer une partie"

```
I⟵0
N⟵0
Tant que I<4 Faire
    | J⟵Entier aléatoire entre 1 et 2
    | I⟵I+J
    | N⟵N+1
Résultat⟵N
```

3) Réalisation de P parties et traitement statistique

Il s'agit de répeter P parties identiques à la précédente et pour chaque valeur de N obtenue, de mémoriser le nombre de parties correspondant à cette valeur de N (effectif) afin de pouvoir calculer ensuite les fréquences correspondantes.
Variables supplémentaires
T est un tableau indexé de 2 à 4 destiné à recevoir les effectifs. Ce tableau sera d'abord initialisé avec des 0.
K désigne le numéro de l'expérience en cours.
M est un indice du tableau T.

Algorithme de la simulation

```
                    Initialiser le tableau T avec des 0
Lire(P)
Pour K variant de 1 jusqu'à P Faire        # réalisation des P expériences
    | N⟵jouer une partie
    | T[N]⟵T[N]+1
Pour M depuis 2 jusqu'à 4 Faire        # Calcul des fréquences
    | T[M]⟵T[M]/P
    | Afficher T[M]
```

On pourra éventuellement supprimer l'instruction `Afficher N` dans "jouer une partie" de façon à avoir une exécution plus rapide de l'algorithme.

Ecriture du programme correspondant à l'algorithme d'abord dans le langage TI 82, ensuite dans le langage Python.

Programmation sur TI 82

```
: EffListe L1
:  {0,0,0,0}→L1
:  Prompt P
:  For(K,1,P)
:  0→I
:  0→N
:  While I<4
:  EntAléat(1,2)→J
:  I+J→I
:  N+1→N
:  End
:  L1(N)+1→L1(N)
:  End
:  For(M,2,4)
:  L1(M)/P→L1(M)
:  Disp "FREQUENCE DU",M
:  Disp L1(M)
:  End
```

Programmation en Python 2.6

```python
from random import *

def jeupartie() :
     I=0
     N=0
     while I<4 :
           J=randint(1,2)
           I=I+J
           N=N+1
     return N

T=[0,0,0,0,0]
P=input("Nombre de parties :")
for K in range(0,P) :
     N=jeupartie()
     T[N]=T[N]+1
for M in range(2,5) :
     T[M]=T[M]/float(P)
     print("Fréquence du ",M," = ",T[M])
```

Points communs et différences:
Les deux langages TI et Python disposent de sous programmes mais leur utilisation ralentirait beaucoup trop la TI 82. Par contre sous Python on retrouve la même organisation que dans les algorithmes.
Les deux langages ne disposent pas de tableaux mais de listes. Par contre les listes de TI sont indéxées depuis 1 et celle de Python depuis 0.
Dans Python les divisions entre entiers donnent par défaut le quotient euclidien, l'expression `T[M]=T[M]/float(P)` force la division décimale en convertissant l'entier P en décimal.

4) Exploitation du résultat

Voici ce que donne une simulation avec Python

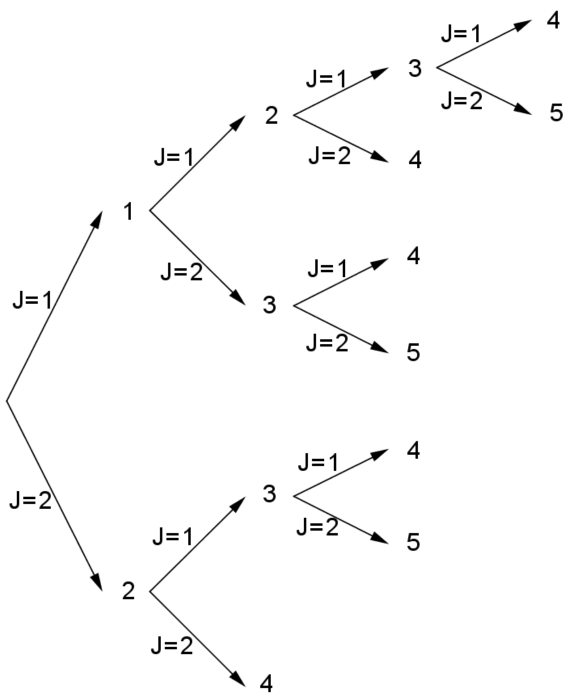
```
>>>
Nombre de parties :1000000
('Fréquence du ', 2, ' = ', 0.25026999999999999)
('Fréquence du ', 3, ' = ', 0.62475599999999998)
('Fréquence du ', 4, ' = ', 0.124974)
```

On peut alors utiliser le programme pour réaliser plusieurs échantillons et étudier la fluctuation.

On pourra ensuite conjecturer le tableau suivant

N =	2	3	4	Total
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

5) Vérification à l'aide d'un arbre



Les deux valeurs du jeton J sont équiprobables.

$P(\mathrm{N}=2)=\frac{1}{4}$ (un chemin sur les 4 chemins de longueur 2)

$P(\mathrm{N}=3)=\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{8}$ (trois chemins sur les 4 chemins de longueur 2 suivi d'un des 5 chemins possibles sur les 6 qui forment le troisième niveau de branche de l'arbre).

$P(\mathrm{N}=4)=1-\frac{1}{4}-\frac{5}{8}=\frac{1}{8}$ (passage par le complémentaire)