L’algèbre dans la tradition d’al-Khawārizmī à al-Karajī

Marouane ben Miled
marouane.benmiled@gmail.com

Institut MÉditerranéen d’Études Avancées (IMéRA)-Marseille;
LAboratoire de Modélisation mathématique et numérique dans les Sciences de l’INgénieur (LAMSIN)-Tunis

Marseille, le 13 mars 2011

L'algèbre dans la tradition d'al-Khawārizmī

Un langages abstrait

L'algèbre, tel que l'élabore al-Khawārizmī, apparaît immédiatement comme un **lieu d'interprétation** des mathématiques « des anciens », un **langage abstrait** dans lequel sont traduits concepts, constructions et propositions géométriques et arithmétiques.

L'algèbre dans la tradition d'al-Khawārizmī

Un langages abstrait

L'algèbre, tel que l'élabore al-Khawārizmī, apparaît immédiatement comme un **lieu d'interprétation** des mathématiques « des anciens », un **langage abstrait** dans lequel sont traduits concepts, constructions et propositions géométriques et arithmétiques.

Un pont interprétatif

L'algèbre, agit alors comme un pont sur lequel géométrie et arithmétique se rencontrent et s'expriment dans une **langue commune**.

L'*Algèbre* d'al-Khawārizmī

Trois termes primitifs

Dans son *Algèbre*, al-Khawārizmī commence par poser trois termes, qu'il appelle « nombres » (*'a'dād*)

al-māl : Argent, richesse ;

al-jidhr : Racine ;

al-'adad : Nombre.

Il pose que le *māl* est le carré du *jidhr*.

L'*Algèbre* d'al-Khawārizmī

Trois termes primitifs

Dans son *Algèbre*, al-Khawārizmī commence par poser trois termes, qu'il appelle « nombres » (*'a'dād*)

al-māl : Argent, richesse ;

al-jidhr : Racine ;

al-'adad : Nombre.

Il pose que le *māl* est le carré du *jidhr*.

Remarque

Le nombre est une classe de nombres. Il y a donc deux acceptions différentes de ce mot, l'une plus générale que l'autre.

L'*Algèbre* d'al-Khawārizmī

Trois termes primitifs

Nous pouvons déjà dire que selon la représentation actuelle :

al-māl correspond à x^2 ;

al-jidhr correspond à x ;

al-'adad : Nombre ; qui correspond à la classe de nos nombres entiers positifs, ou parfois rationnels ;

L'*Algèbre* d'al-Khawārizmī

Une combinatoire et six équations

En envisageant toutes les possibilités de combiner ces termes par addition, de façon à écrire des égalités, al-Khawārizmī obtient des « phrases ».

L'*Algèbre* d'al-Khawārizmī

Une combinatoire et six équations

En envisageant toutes les possibilités de combiner ces termes par addition, de façon à écrire des égalités, al-Khawārizmī obtient des « phrases ».

Appelons-les les six équations canoniques

- des *māl* sont égaux à des *choses* ($ax^2 = bx$) ;
- des *māl* sont égaux à des nombres ($ax^2 = c$) ;
- des *choses* sont égales à des nombres ($bx = c$) ;
- des *māl* plus des *choses* sont égaux à des nombres ($ax^2 + bx = c$) ;
- des *māl* plus des nombres sont égaux à des *choses* ($ax^2 + c = bx$) ;
- des *choses* plus des nombres sont égaux à des *māl* ($bx + c = ax^2$).

Une résolution algorithmique

Six algorithmes. . .

Pour chacune de ces six équations, al-Khawārizmī donne un algorithme permettant de trouver la ou les solutions positives, lorsqu'elles existent ;

Une résolution algorithmique

Six algorithmes. . .

Pour chacune de ces six équations, al-Khawārizmī donne un algorithme permettant de trouver la ou les solutions positives, lorsqu'elles existent ;

. . . démontrés

chaque algorithme est démontré par des techniques algébrico–géométriques.

Une résolution algorithmique

Six algorithmes. . .

Pour chacune de ces six équations, al-Khawārizmī donne un algorithme permettant de trouver la ou les solutions positives, lorsqu'elles existent ;

. . . démontrés

chaque algorithme est démontré par des techniques algébrico–géométriques.

Démonstrations reprises plus tard de façon rigoureuse

par Thābit b. Qurra qui établira, en passant, l'équivalence entre la résolution algébrique et son interprétation géométrique à partir du Livre II des *Éléments* d'Euclide.

Toutes les équations des deux premiers degrés

Al-jabr et *al-muqābala*

Puis, al-Khawārizmī montre comment toutes les autres équations des deux premiers degrés se ramènent à l'une de ces six formes, par les deux opérations *al-jabr* et *al-muqābala*.

Les mathématiques grecques connaissent alors une double traduction

du grec vers l'arabe

Le mouvement de traductions du grec vers l'arabe que connaît le troisième siècle de l'hégire s'accompagne d'une seconde traduction :

des deux cadres arithmétique et géométrique grecques

dans les termes de l'*Algèbre* d'al-Khawārizmī.

par

des mathématiciens comme Thābit b. Qurra, Qusṭā b. Lūqā, Abū al-Wafā' al-Būzjānī, al-Māhānī, al-Khāzin, al-Ahwāzī . . .

En ce qui concerne les grandeurs irrationnelles

définies dans le Livre X des *Éléments*

elles sont redéfinies dans un cadre quantitatif, susceptible d'être soumis aux calculs,

Définition numérique des lignes rationnelles et sourdes

Association des lignes à des quantités algébriques

Dans son *Explication du Dixième Livre*, al-Māhānī associe les lignes droites à des quantités numériques construites par sommes et différences finies et par radicaux d'ordres $2^n 3^m$ $(n, m \geq 0)$.

définies par « la parole »

Les lignes dont les quantités numériques sont exprimables par la parole (*i.e.* sans radicaux) sont rationnelles (*munṭaqa*, traduction du grec ῥηταί), les autres sont dites sourdes (*ṣumma*, traduction du grec ἄλογοι).

Le texte

Les droites, du point de vue de l'expression, n'ont que deux sens : soit elles sont rationnelles, comme lorsqu'on dit dix, douze, trois et demi, six et un tiers et leurs analogues dont on exprime la grandeur et prononce la quantité ; soit, elles ne sont pas rationnelles et s'appellent sourdes : celles dont on ne peut pas exprimer la grandeur ni prononcer la quantité, comme les racines des nombres qui ne sont pas carrés tels dix, quinze, vingt et les côtés des nombres qui ne sont pas des cubes et les autres bords et extrémités des nombres, ou celles obtenues par composition ou soustraction, ou composition avec une rationnelle, ou dont est soustraite une rationnelle, ou qui sont soustraites d'une rationnelle, et les espèces de composition et de soustraction semblables à cela.

Traduction algébrique des propositions

Les constructions issues des propositions du Livre X

donnent lieu à des équations à résoudre selon la méthode d'*al-jabr* et d'*al-muqābala*,

ou des calculs algébriques

qui mettent en oeuvre les quatre opérations de l'arithmétique, l'extraction de la racine carrée et les techniques de développement, factorisation, changement de variable.

Exemple

Propositions X.91 à 96 et 97 à 102

qui appartiennent à la même famille que les Propositions X.54 à 59 et 60 à 65.

Propositions X.91 and 97

La Proposition X.91 établit que

la droite dont le carré est égal au rectangle de côtés une rationnelle et la première apotomé, est la droite apotomé.

dans le texte d'al-Māhānī

l'exemple $9-\sqrt{45}$ est traité.
Comme $T=9$ et $C=\sqrt{45}$, on obtient : $T_1=7+\frac{1}{2}$ et $T_2=1+\frac{1}{2}$ d'où,

$$\sqrt{9-\sqrt{45}}=\sqrt{7+\frac{1}{2}}-\sqrt{1+\frac{1}{2}}$$

Qui vérifie le critère qui définit les apotomes

L'auteur vérifie que $\sqrt{7+\frac{1}{2}}-\sqrt{1+\frac{1}{2}}$ est une apotome.

Le texte

Calcul de l'apotomé du Dixième Livre de l'ouvrage d'Euclide [. . .] *Racine de la première apotomé, par la voie du nombre et de la quantité*
<La première apotomé> est neuf moins racine de quarante-cinq. Pour connaître sa racine, sache que la racine de la première apotomé est aussi une apotomé. Partage le tout, qui est neuf, en deux parties dont le produit est comme le quart du carré du congru, qui est quarante-cinq, et dont le quart est onze et quart. Pour partager neuf en deux parties dont le produit soit onze et quart, nous procédons par la voie d'*al-jabr* et *al-muqābala*. Nous disons alors que nous savons qu'une partie est une chose et l'autre, neuf moins une chose. La multiplication de neuf moins une chose par une chose donne neuf choses moins un māl qui est égal à onze et quart. Alors opère *al-jabr* et *al-muqābala* : il vient onze et quart et un māl qui est égal à neuf choses. Le problème devient alors des māl plus un nombre est égal à des racines.

suite

Effectue cela en partageant les racines en deux moitiés et multiplie-les par elles-mêmes, ce qui donne vingt et quart. Soustrais-en le nombre qui est avec le māl et qui est onze et quart, il reste neuf, sa racine est trois. Tu l'ôtes de la moitié des racines, qui est quatre et demi, il reste un *dirham* et une demi-chose. C'est l'une des parties de neuf, l'autre est sept et demi. Or sept et demi multiplié par un et demi est onze et quart, qui est comme la moitié de la racine de quarante-cinq multipliée par elle-même. Voici alors trois grandeurs proportionnelles : la première et la troisième sont les deux parties du neuf, qui sont sept et demi et un et demi, et la moyenne est la moitié de la racine de quarante-cinq. D'où, lorsqu'on multiplie le premier par le troisième, on trouve la moitié de la racine de quarante-cinq par elle-même. Alors les deux parties de neuf sont sept et demi et un et demi, la racine de la plus grande partie, dont est soustrait la racine de la plus petite partie, donne racine de <(>neuf moins racine de quarante-cinq<)> qui est la première apotomé. La racine de la première apotomé est aussi une apotomé, c'est la racine de sept et demi moins la racine d'un *dirham* et demi.

Calculer $\sqrt{T - C} = \sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}$ (X.91 à 96)

Soit $A = T - C$ une apotomé (T et C sont incommensurables en longueur et commensurables en puissance, avec $T \geq C$).

Soient T_1, T_2 tels que $\left\{ \begin{array}{rcl} T_1 + T_2 & = & T \\ T_1 T_2 & = & \frac{C^2}{4} \end{array} \right.$

T_1 et T_2 ont été choisis de façon à ce que $\sqrt{A} = \sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}$.

On détermine T_1 et T_2 par *al-jabr* et *al-muqābala*

Poser une inconnue

Posons $x = T_1$ alors, $T_2 = T - x$ et $T_1 T_2 = x(T - x)$.

Se ramener à une équation d'al-Khawārizmī

On a alors, $x(T - x) = C^2/4$ d'où, $Tx - x^2 = C^2/4$

On détermine T_1 et T_2 par *al-jabr* et *al-muqābala*

Poser une inconnue

Posons $x = T_1$ alors, $T_2 = T - x$ et $T_1 T_2 = x(T - x)$.

Se ramener à une équation d'al-Khawārizmī

On a alors, $x(T - x) = C^2/4$ d'où, $Tx - x^2 = C^2/4$

réduite à l'une des six formes canoniques

que l'on résout en appliquant les opérations *al-jabr* et *al-muqābala* pour se ramener à l'une des six formes canoniques d'al-Khawārizmī $Tx = x^2 + C^2/4$ dont on connaît les solutions.

La solution

On obtient alors

$$x = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - C^2}}{2}$$

En supposant que $T_2 > T_1$ on obtient

$$T_2 = \frac{T + \sqrt{T^2 - C^2}}{2}$$

$$T_1 = \frac{T - \sqrt{T^2 - C^2}}{2}$$

et l'on a

$$\sqrt{A} = \sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}$$

Vérification

par le calcul

On vérifie l'égalité obtenue en faisant $(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})^2$ qui, après développement et remplacement de T_1 et de T_2 par leurs valeurs, donne $T - C$, c'est-à-dire A.

qui est

la traduction algébrique des Propositions X.97 à 102.

Exemples des Propositions X.91 and 97

La traduction algébrique de X.97 consiste à vérifier le résultat

en l'élevant au carré $\sqrt{7+1/2}-\sqrt{1+1/2}$pour trouver $9-\sqrt{45}$.

ce qui nécessite des techniques de calculs algébriques

dont la règle des signes.

Le texte

<Vérification> Pour le vérifier, nous multiplions la racine de sept et demi moins la racine de un et demi par elle-même. La racine de sept et demi par elle-même est sept et demi. Nous multiplions moins racine de un et demi par elle-même, ce qui donne un et demi. La racine de sept et demi par moins la racine de un et demi deux fois donne moins racine de onze et quart deux fois. Alors multiplie deux par deux qui sont quatre. Puis multiplie cela par onze et quart qui donne quarante-cinq. Donc la première apotomé est neuf moins racine de quarante-cinq et sa racine est racine de sept et demi moins racine de un et demi.

Règles de calculs algébriques

utilisées par l'auteur (celles marquées d'une étoile existe dans l'*Algèbre d'al-Khawārizmī*) :

Pour tout $a, b > 0$ rationnels ou irrationnels, pour toute inconnue x,

$$aa = a^2 \quad (*)$$

$$(a+b)(a+b) = a^2+b^2+2ab,\ (a-b)(a-b) = a^2+b^2-2ab \quad (*)$$

$$\sqrt{a}\sqrt{a} = a\ (*),\ \sqrt{\sqrt{a}}\sqrt{\sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{ab}}$$

(Al-Khawārizmī avait déjà introduit la règle $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$)

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}\ (*),\ x\sqrt{b} = \sqrt{x^2 b},\ \sqrt{x^2} = x\ (*),\ a\sqrt{\sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{(a^2)^2 b}}$$

Règles de calculs algébriques

Pour simplifier $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, quand $2ab$ est un carré parfait

l'auteur fait $\sqrt{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2}$, il trouve ainsi $\sqrt{a + b \pm \sqrt{2ab}}$, qui est le carré d'un nombre.

Les objectifs algébriques diffèrent des objectifs géométriques

La forme algébrique de ces propositions donne naissance à de nouveaux objectifs.

ainsi, les Propositions X.97 à 102

sont la vérification des Propositions X.91 à 96 ;

Les objectifs algébriques diffèrent des objectifs géométriques

La forme algébrique de ces propositions donne naissance à de nouveaux objectifs.

ainsi, les Propositions X.97 à 102

sont la vérification des Propositions X.91 à 96 ;

tandis que les Propositions X.91 à 93

consistent en la recherche d'une écriture algébrique plus simple, dans le sens où les radicaux ne sont appliqués qu'à des quantités monômes.

$$\sqrt{9-\sqrt{45}} = \sqrt{7+\frac{1}{2}} - \sqrt{1+\frac{1}{2}}$$

Incohérence

Certaines propositions deviennent inconsistantes (*ie* elle ne font plus sens) une fois traduites dans une forme algébrique

Pour les Propositions X.94 à 96, les motivations algébriques sont vaines car les calculs ne produisent pas les racines de monômes.

Incohérence

Certaines propositions deviennent inconsistantes (*ie* elle ne font plus sens) une fois traduites dans une forme algébrique

Pour les Propositions X.94 à 96, les motivations algébriques sont vaines car les calculs ne produisent pas les racines de monômes.

Exemple

L'auteur traite l'exemple suivant de quatrième apotomé : $(6 - \sqrt{24})$. Sa racine est donc sous sa forme à calculer la racine d'une différence de monômes $(\sqrt{6 - \sqrt{24}})$, mais sa forme calculée est $(\sqrt{3 + \sqrt{3}} - \sqrt{3 - \sqrt{3}})$.

Incohérence

Certaines propositions deviennent inconsistantes (*ie* elle ne font plus sens) une fois traduites dans une forme algébrique

Pour les Propositions X.94 à 96, les motivations algébriques sont vaines car les calculs ne produisent pas les racines de monômes.

Exemple

L'auteur traite l'exemple suivant de quatrième apotomé : $(6 - \sqrt{24})$. Sa racine est donc sous sa forme à calculer la racine d'une différence de monômes $(\sqrt{6 - \sqrt{24}})$, mais sa forme calculée est $(\sqrt{3 + \sqrt{3}} - \sqrt{3 - \sqrt{3}})$.

et il n'y a pas espoir

d'obtenir la simplification recherchée en réitérant la transformation algébrique car la forme calculée elle-même la racine de la quatrième apotomé $(\sqrt{3 - \sqrt{3}})$.

Incohérence

L'auteur le déplore

en disant que l'extraction de la racine de la quatrième apotomé « nécessite de la connaître avant d'aboutir au résultat, comme c'est le cas à cette étape du problème qui se répète perpétuellement ».

Mais il accepte

la forme obtenue car c'est celle de l'irrationnelle mineure obtenue dans la Proposition X.94 qu'il est en train de traduire algébriquement.

Incohérence

L'auteur le déplore

en disant que l'extraction de la racine de la quatrième apotomé « nécessite de la connaître avant d'aboutir au résultat, comme c'est le cas à cette étape du problème qui se répète perpétuellement ».

Mais il accepte

la forme obtenue car c'est celle de l'irrationnelle mineure obtenue dans la Proposition X.94 qu'il est en train de traduire algébriquement.

Seul la tradition géométrique justifie encore

d'énoncer ces propositions qui ne font plus sens sous leurs nouvelles formes algébriques.

Alors sont des quantités algébriques . . .

sujettes aux calculs

Alors sont des quantités algébriques . . .

sujettes aux calculs

- les nombres (entiers), pluralités d'unité ;

Alors sont des quantités algébriques . . .

sujettes aux calculs

- les nombres (entiers), pluralités d'unité ;
- le *chay'* et son carré ;

Alors sont des quantités algébriques . . .

sujettes aux calculs

- les nombres (entiers), pluralités d'unité ;
- le *chay'* et son carré ;
- et « toutes » les grandeurs devenues des quantités irrationnelles.

Réforme de l'algèbre

Début XI^e siècle

Le calcul algébrique, commencé avec al-Khawārizmī, donne lieu à une réforme de l'algèbre conçue par al-Karajī :

calculer sur ces « nombres » d'un genre nouveau

aboutit au projet de focalisation sur l'étude spécifique des algorithmes de calcul, indépendamment de l'objet du calcul, ce sont les débuts du calcul formel.

Réforme de l'algèbre

L'opération devient l'objet de l'algèbre

les algorithmes de calculs sont alors étudiés pour eux-mêmes ;

Le nombre est alors un support muet du calcul

et de terme d'une équation (connu ou inconnu), le nombre devient alors *variable* :

la variable de base

du polynôme, ainsi que le polynôme lui-même.

Des variables et de leurs interprétations

L'interprétation de la variable sous forme

- d'inconnues ;
- de quantités irrationnelles ;
- grandeurs géométriques ;
- ou simplement de nombre entiers ,

permet d'atteindre tous les nombres de niveaux d'abstraction inférieurs .

Des tableaux objets de calculs

Au XIe siècle

al-Samaw'al décrit dans son *Algèbre* les algorithmes sur des tableaux et dans des tableaux :

le *nombre*

n'est plus ici que le tableau, objet d'un calcul (pour les nombres polynômes),
et également chaque case du tableau (pour les nombres monômes).

Des tableaux objets de calculs

le *nombre*

7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^5}$	$\frac{1}{x^6}$	$\frac{1}{x^7}$

TABLE: Tableau des monômes

7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	a_{-1}	a_{-2}	a_{-3}	a_{-4}	a_{-5}	a_{-6}	a_{-7}

TABLE: Tableau des polynômes

où chaque a_i est le coefficient de x_i dans le polynôme : il peut être positif, nul (case vide) ou négatif.

Causes du calcul algébrique

Quels fondements pour cette nouvelle discipline ?

Conscient du fait que la rupture avec la géométrie nécessitait de fonder la nouvelle discipline sur un socle permettant de définir les nouveaux objets (variables et opérations abstraites), et de justifier les calculs indépendamment des fondements axiomatiques de la géométrie, al-Karajī rédigera un texte qui a pour titre *Causes du calcul d'al-Jabr et d'al-Muqābala*

Causes du calcul algébrique

dont voici l'introduction

J'ai voulu établir la démonstration de ce que j'ai représenté de la division des racines et d'autre que cela, de ce que j'ai démontrés par les lignes et les figures, en ce que cela établitun argument de visu que l'on ne peut réfuter et qui est suffisant.

[. . .]

Ainsi, j'ai vu que je dois expliciter ces démonstrations dans [ce] livre ; elles sont l'élément par lequel disparaît le doute dans tout ce que j'ai établi et l'argument qui coupe court à toute lacune ; et que je dois établir, sur ces figures, des démonstrations par l'algèbre et l'arithmétique, sur lesquelles s'appuie celui pour qui la voie des droites et des figures s'avère hermétique, afin d'obtenir la justesse de la démonstration telle que je l'ai figurée, pour tous ceux qui ont examiné ce livre, parmi ceux qui s'adonnent à la science du calcul. [Et j'ai vu que je dois] ajouter à cela la sciences de la démonstration pour la multiplication des racines, leur partage, leur produit, leur somme, par cette technique de travail , si cela est nécessaire, car celui qui l'examine doit maîtriser cette discipline et la dominer.

Dieu pourvoit la conciliation.

Tout est nombre

Potentiellement,

tout nouvel objet mathématique à venir, susceptible d'être soumis aux calculs, *i.e.* tout objet d'opération, est un nombre.

Bibliogaphie succinte

- M. Ben Miled – « Les commentaires d'al-Māhānī et d'un anonyme du Livre X des *Éléments* d'Euclide », *Arabic sciences and philosophy, Cambridge University Press* **9** (1999), no. 1, p. 89–156.
- — , « Les quantités irrationnelles dans l'œuvre d'al-Karajī », in *De Zénon d'Élée à Poincaré* (R. Morelon & A. Hasnawi, éds.), Les cahiers du Mideo, no. 1, Éditions Peeters, 2004, p. 27–54.
- — , *Opérer sur le Continu, traditions arabes du Livre X des Éléments d'Euclide*, Histoire des Sciences, Académie tunisienne *Beït al-Ḥikma*, Carthage, 2005, Préface de Roshdi Rashed.
- al-Karagī – *L'algèbre al-Badī'*, Manuscrit de la Bibliothèque Vaticane Barberini Orientale, no. 36, 1, Beyrouth, 1964, Édité par Adel Anbouba.
- al-Karajī – « 'Ilal ḥsāb al-Jabr wa'l-muqābalat wa'l-burhān 'alayhi », Manuscrit.
- — , « Al-Fakhrī », in *Tārīkh 'ilm al-jabr fī 'l-'ālim al-'arabī* (A. S. Sa'īdān, éd.), vol. I, Kuwait, 1986, p. 95–308.
- M. I. M. al-Khwārizmī – *Le commencement de l'algèbre*, Sciences dans l'histoire, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 2007, Texte établi, traduit et commenté par Roshdi Rashed.