Recherche des zéros d'une fonction en classe de seconde

Stéphane Groupe algorithmique au lycée

IREM Campus de Luminy

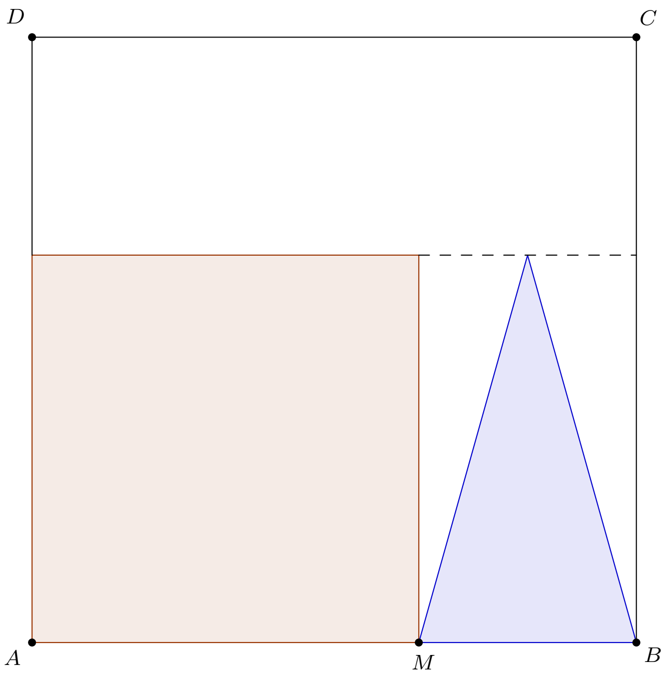
1 Un problème du document ressource

Dans un premier temps citons un extrait des programmes de seconde :

> L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier :
> • **un problème se ramenant à une équation du type** $f(x) = k$ et de le résoudre dans le cas où la fonction est donnée (définie par une courbe, un tableau de données, une formule) et aussi lorsque toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction ; [...]

Dans le document ressource, on trouve le problème suivant, qui est du type défini par l'extrait du programme ci-dessus.

Exemple : une même situation pour divers problèmes



Les carré ABCD a un côté de longueur $8cm$. M est un point du segment [AB]. On dessine comme ci-contre dans le carré ABCD

- un carré de côté [AM]
- un triangle isocèle de base [MB] et dont la hauteur a même mesure que le côté [AM] du carré.

On s'intéresse aux aires du carré, du triangle du motif constitué par le carré et le triangle.

Problème du type n°1 : On voudrait que le motif ait une aire égale à la moitié de celle du carré ABCD. Quelle dimensions faut-il donner au motif ?

Modélisons et résolvons ce problème.
Si on pose $x = AM$, la fonction qui à x associe l'aire du motif est définie sur $[0;8]$ par

$$\mathcal{A}(x) = \frac{x^2}{2} + 4x$$

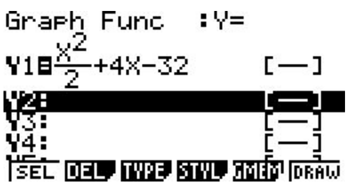
Le problème revient alors à résoudre sur $[0;8]$ l'équation $\frac{x^2}{2} + 4x - 32 = 0$.
En seconde, aucune technique algébrique n'est disponible [1] pour déterminer une valeur (approchée ou exacte) de cette équation ($-4(\sqrt{5}+1)$ et $4(\sqrt{5}-1)$ sont solutions sur $\mathbb{R}$). Or ce document ressource est prévu la classe de seconde. Pour que les élèves soient réellement capables d'étudier ce type de problème, il est nécessaire qu'ils aient à leur disposition une technique expérimentale pour déterminer une valeur approchée de la solution sur $[0;8]$. Le calcul formel, que les élèves n'ont en général pas à leur disposition sur leur calculatrice en classe de seconde et qui peut nous donner des valeurs exactes, joue lui le rôle d'outil de contrôle ou de vérification.

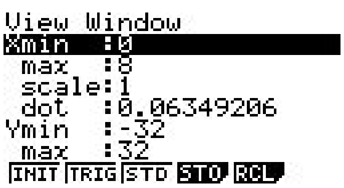
2 Technique algorithmique et expérimentale avec calculatrice

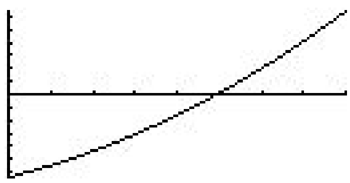
La technique mise en œuvre ci-dessous est une technique algorithmique qui n'est pas nouvelle dans l'enseignement au lycée. En classe de terminale, elle s'appuie en général sur le théorème des valeurs intermédiaires et sur la monotonie de la fonction pour justifier à l'aide de la théorie disponible les résultats approchés. En classe de seconde, nous n'avons pas à disposition ces résultats technologico-théoriques, la technique est donc expérimentale.
Dans une calculatrice graphique quelconque, on saisit l'expression algébrique de la fonction dont on veut déterminer un zéro.

2.1 Un premier faisceau de renseignements : exploration graphique

La première fenêtre de vue à régler correspond à l'intervalle $[0;8]$ pour les valeurs de x. Par des considérations géométriques, il n'est pas trop difficile de trouver que $y \in [-32;32]$. Voici une copie d'écran que l'on obtient avec une calculatrice[2].

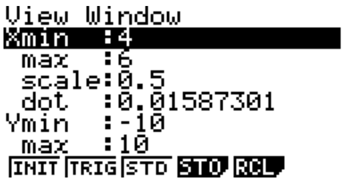


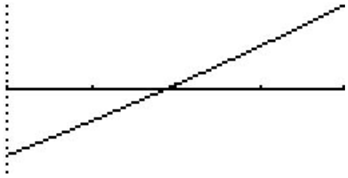




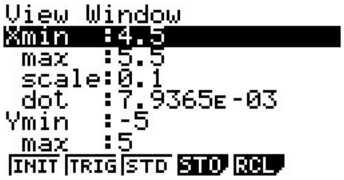
On n'arrive pas à lire si la courbe coupe l'axe des abscisses avant ou après 5. On réduit donc la fenêtre à l'intervalle $[4;6]$.

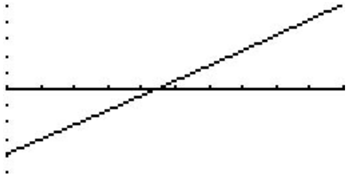
[1]La détermination algébrique de la forme canonique étant clairement hors programme
[2]Pourquoi la calculatrice ? C'est pour l'instant l'outil que les élèves ont tout le temps sur eux. Il n'y a pas à s'organiser pour y accéder, pas à réserver de salles ...

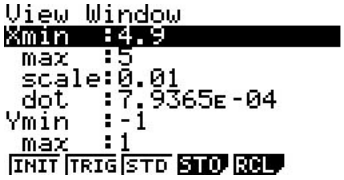


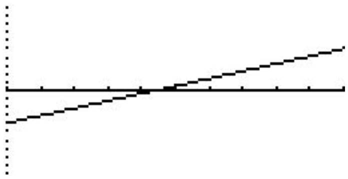


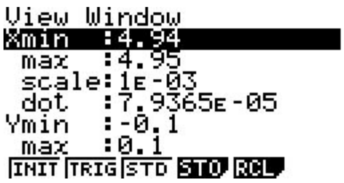
Il est clair que $f(x) = 0$ pour un x de l'intervalle $[4.5\ ,\ 5.5]$.

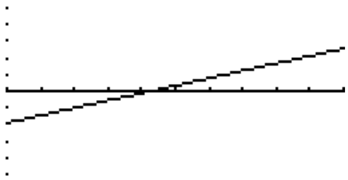








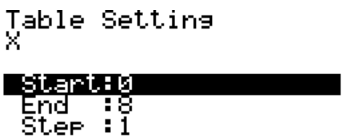


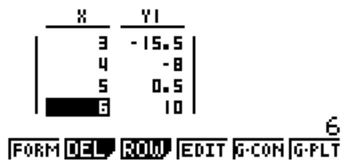


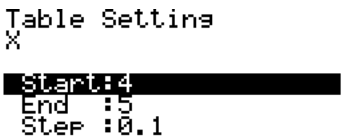
Ici, expérimentalement, on voit que $f(x) = 0$ pour un x de l'intervalle $[4,944; 4,945]$.
Ainsi de suite selon la précision que l'on cherche.

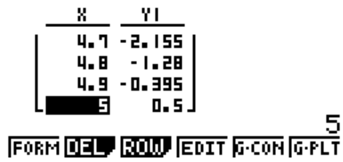
2.2 Un deuxième faisceau : exploration numérique par la technique du balayage

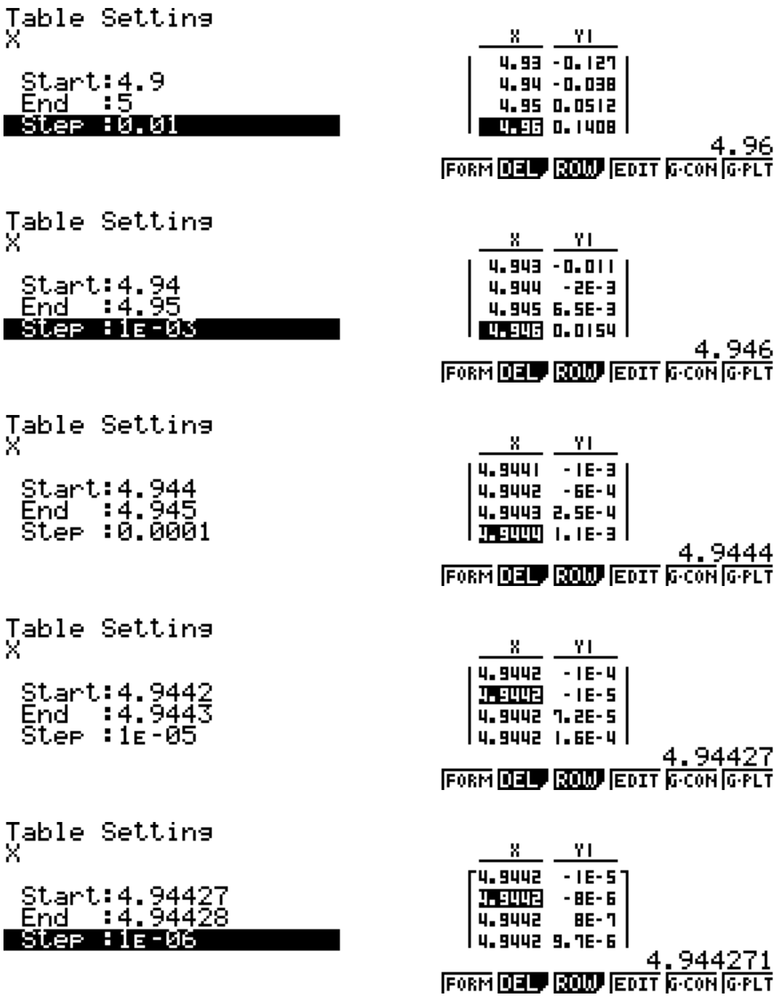
En complément de l'étude graphique, un étude numérique permet de croiser les sources et d'établir une conviction sur la valeur obtenue. Insistons, en effet le théorème des valeurs intermédiaires étant indisponible, nous restons dans un travail expérimental.





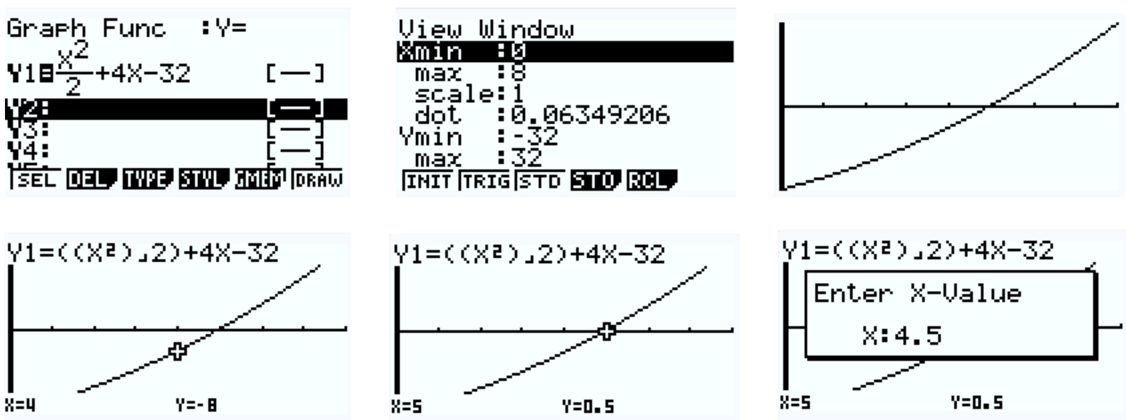


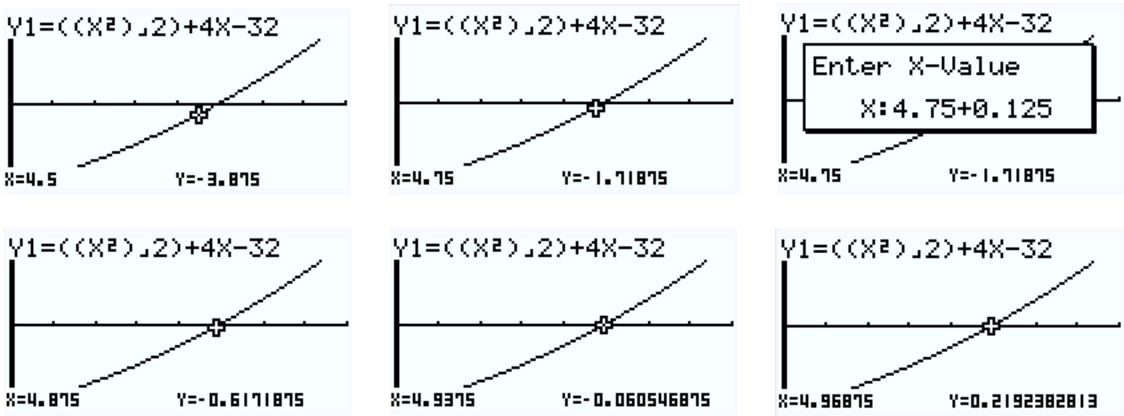




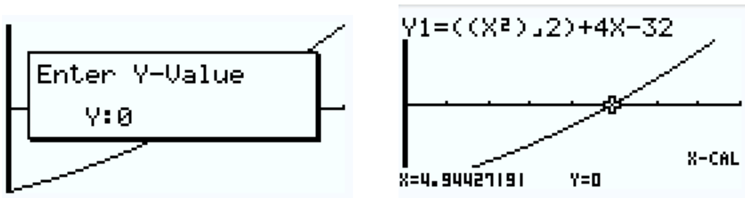
2.3 Retour dans l'environnement graphique

Les calculatrices modernes permettent dans l'environnement graphique de tester des valeurs. Avec une Casio Graph 35+ permet d'obtenir les écrans de calculatrices suivants.





Il existe des fonctions intégrées qui permettent de déterminer directement une valeur approchée. Cela permet une autre technique. Elle consiste à utiliser **Gsolve Xcal** dans un certain type de calculatrice. Il est clair que cette technique n'est pas à utiliser dans le ce cadre et qu'elle n'a que peu d'intérêt dans un premier temps.



3 L'algorithme de dichotomie

La technique expérimentale décrite ci-dessus a comme idée directrice la découpe de l'intervalle de travail en plusieurs intervalles afin de déterminer l'intervalle dans lequel est située la racine. Le mot dichotomie provient du grec di (deux) et tomein (couper), ce qui signifie littéralement " couper en deux ". Ce principe très efficace et relativement facile à mettre en œuvre intervient dans de nombreux algorithmes :

- Calcul des zéros d'une fonction
- Algorithmes de recherche
- Algorithmes de classement
- …

3.1 Une introduction possible à la dichotomie

Le jeu se pratique à 2 personnes : 1 joueur et 1 maitre du jeu. Le maître du jeu affiche deux nombres entiers a et b ($a < b$) et choisit un nombre entier N secret entre a et b (a et b compris). Le joueur doit essayer de deviner le nombre secret en se conformant aux règles suivantes :

- Le joueur propose un nombre.

- Le maître du jeu compare la proposition au nombre secret et répond : Gagné, Plus ou Moins.
- Le joueur, s'il n'a pas encore gagné, propose un autre nombre et ce jusqu'à ce qu'il gagne.

On appelle "un coup" la succession d'une annonce du joueur et de la réponse du maître du jeu.
Trouver une stratégie plus efficace pour amener rapidement à la victoire
On pourra lire :
dichotomie.pdf sur http://www.irem.univ-mrs.fr/-Algorithmique-logique-et-

3.2 Méthode de dichotomie pour le calcul d'un zéro d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, qui change de signe entre a et b. Le principe de dichotomie permet en divisant à chaque étape l'intervalle de moitié, en considérant le milieu c, de trouver une valeur approchée d'une racine de f à ϵ près. Pour atteindre la précision ϵ , arbitrairement petite, il suffit d'itérer ce processus n fois, où n est le plus petit entier tel $\frac{|a-b|}{2^n} \leq \epsilon$. On peut aussi dire que n est le plus petit entier supérieur ou égal à $log_2(\frac{|a-b|}{\epsilon})$.

Algorithme 1 [Recherche d'une racine par dichotomie]

Entrées : a réel, b réel, $a < b$, f fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) * f(b) \leq 0$, ϵ un nombre réel arbitrairement petit.
Sortie : un nombre réel qui approche une racine de f à ϵ près.
Invariant : $f(a) * f(b) \leq 0$
tant que $b - a > \epsilon$ **faire**
  $c \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$
  si $f(a) * f(c) > 0$ **alors** $a \leftarrow c$ **sinon** $b \leftarrow c$
résultat a

L'algorithme mis en forme sous le logiciel Algobox se présente comme suit dans l'environnement de programmation ;

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  a PREND_LA_VALEUR 0
  b PREND_LA_VALEUR 8
  TANT_QUE ((b-a)>0.000001) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    c PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
    SI (F1(a)*F1(c)>0) ALORS
      DEBUT_SI
      a PREND_LA_VALEUR c
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        b PREND_LA_VALEUR c
        FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Une valeur approchée de la solution à 0,000001 est "
  AFFICHER a
FIN_ALGORITHME
```

Et comme ci-dessous dans l'environnement de test de l'algorithme.

AlgoBox : dichotomie

CODE DE L'ALGORITHME :

```
1     VARIABLES
2       a EST_DU_TYPE NOMBRE
3       b EST_DU_TYPE NOMBRE
4       c EST_DU_TYPE NOMBRE
5     DEBUT_ALGORITHME
6       a PREND_LA_VALEUR 0
7       b PREND_LA_VALEUR 8
8       TANT_QUE ((b-a)>0.000001) FAIRE
9         DEBUT_TANT_QUE
10        c PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
11        SI (F1(a)*F1(c)>0) ALORS
12          DEBUT_SI
13          a PREND_LA_VALEUR c
14          FIN_SI
15          SINON
16            DEBUT_SINON
17            b PREND_LA_VALEUR c
18            FIN_SINON
19        FIN_TANT_QUE
20      AFFICHER "Une valeur approchée de la solution à 0,000001 est "
21      AFFICHER a
22    FIN_ALGORITHME
23
24  Fonction numérique utilisée :
25  F1(x)=((x*x)/2)+(4*x)-32
```

Algobox permet de suivre pas à pas l'évolution de l'algorithme :
Voilà ce que donne les premières lignes du code :

```
#1 Nombres/chaines (ligne 6) -> a:0 | b:0 | c:0
#2 Nombres/chaines (ligne 7) -> a:0 | b:8 | c:0
Entrée dans le bloc DEBUT_TANT_QUE/FIN_TANT_QUE :
condition vérifiée (ligne 9)
#3 Nombres/chaines (ligne 10) -> a:0 | b:8 | c:4
La condition est vérifiée (ligne 11)
Entrée dans le bloc DEBUT_SI/FIN_SI (ligne 12)
```

En nettoyant le code on peut lire l'évolution de la suite des valeurs prises pas a, b et c.

lignes	a	b	c
(ligne 6)	0	0	0
(ligne 7)	0	8	0
(ligne 10)	0	8	4
(ligne 13)	**4**	**8**	**4**
(ligne 10)	4	8	6
(ligne 17)	**4**	**6**	**6**
(ligne 10)	4	6	5
(ligne 17)	**4**	**5**	**5**
(ligne 10)	4	5	4.5
(ligne 13)	**4.5**	**5**	**4.5**
(ligne 10)	4.5	5	4.75
(ligne 13)	**4.75**	**5**	**4.75**
(ligne 10)	4.75	5	4.875
(ligne 13)	**4.875**	**5**	**4.875**
(ligne 10)	4.875	5	4.9375
(ligne 13)	**4.9375**	**5**	**4.9375**
(ligne 10)	4.9375	5	4.96875
(ligne 17)	**4.9375**	**4.96875**	**4.96875**
(ligne 10)	4.9375	4.96875	4.953125
(ligne 17)	**4.9375**	**4.953125**	**4.953125**
(ligne 10)	4.9375	4.953125	4.9453125
(ligne 17)	**4.9375**	**4.9453125**	**4.9453125**
(ligne 10)	4.9375	4.9453125	4.9414063
(ligne 13)	**4.9414063**	**4.9453125**	**4.9414063**
(ligne 10)	4.9414063	4.9453125	4.9433594
(ligne 13)	**4.9433594**	**4.9453125**	**4.9433594**
(ligne 10)	4.9433594	4.9453125	4.9443359
(ligne 17)	**4.9433594**	**4.9443359**	**4.9443359**
(ligne 10)	4.9433594	4.9443359	4.9438477